## 1.4.3 MESSFEHLER

Jede Messung ist mit einer Unsicherheit behaftet!

Reduktion der Unsicherheit

↳ mehrfach messen

| Messung | Person 1 Zeit [s] |
|---|---|
| 1 | 1.35 |
| 2 | 1.31 |
| 3 | 1.35 |
| 4 | 1.33 |
| 5 | 1.34 |
| Mittelwert | 1.34 |

Mittelwert

Einzelmessung

$$\langle t \rangle = (t_1 + t_2 + \dots t_5) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i$$

Anzahl der Messungen

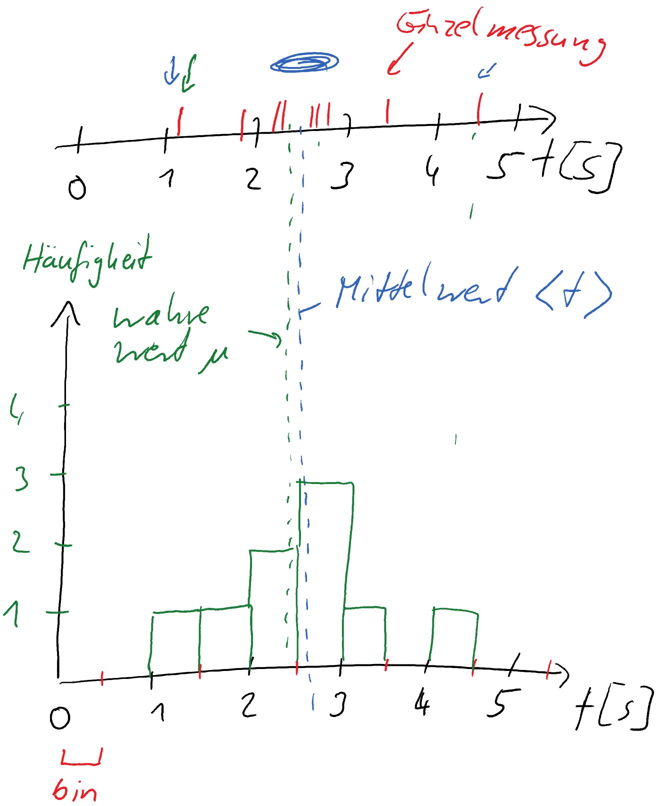
ABER: zwei Arten von Unsicherheiten

- statistische Fehler: zufällige Streuung der Meßwerte
- systematische Fehler: immer gleiche Abweichung durch Meßmethode, falsche Eichung der Meßgeräte, ...

### a) statistische Unsicherheit

Einzelergebnisse schwanken um den wahren Wert $\mu$ ("mü")

↳ Beschreibung durch Wahrscheinlichkeitsrechnung




gebinntes Histogramm

Für die n-fache Wiederholung der Messung gilt:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \langle t \rangle = \mu}$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \langle t \rangle = \mu}$$

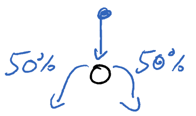
bin

↳ Annäherung an den wahren Wert $\mu$.

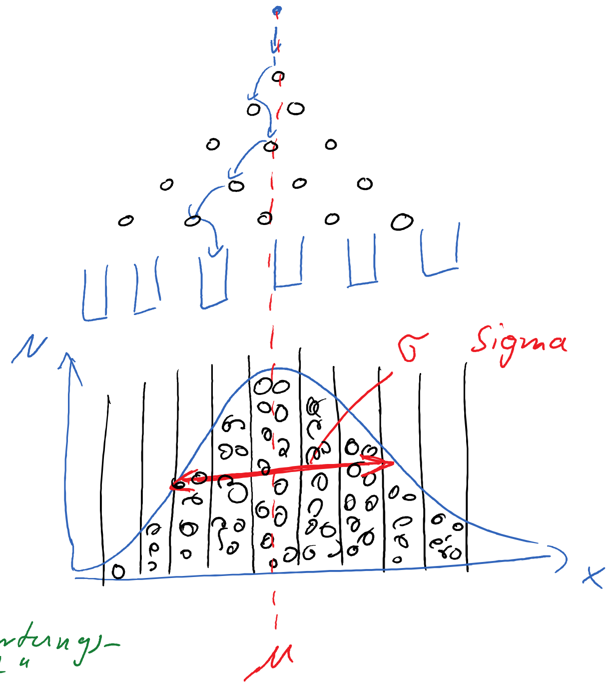
**Zentraler Grenzwertsatz**

Falls sich bei einer Messung sehr viele kleine Störungen überlagern, nähert sich die Verteilung der Ergebnisse einer **Normalverteilung** an (Gauss, Glockenkurve)

**Versuch: Galton-Brett**




jeweils 50% Wahrscheinlichkeit pro Seite pro Stift




Annäherung an Normalverteilung

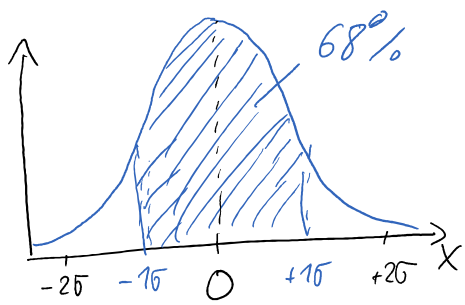
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$\mu$ „Erwartungswert“ $\Rightarrow$ Mitte

$\sigma^2$ „Varianz“ $\Rightarrow$ Breite

$f(x)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wahrscheinlichkeit einen Meßwert zwischen $-1\sigma$ und $+1\sigma$ zu bekommen




$$P(\pm 1\sigma) = \int_{-1\sigma}^{+1\sigma} f(x)\,dx = \underline{\underline{68\%}}$$

**$\pm 1\sigma$ wird als Maß für die Streuung verwendet: 68%**

z.B. $w = "10 \pm 1" \hat{=}$ mit 68% Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Wert zwischen 9 und 11

ABER: Mit 100% − 68% = 32% Wahrscheinlichkeit ist der wahre Wert < 9 oder > 11!

Wie erhält man $\sigma$ und $\mu$?

- Mittelwert

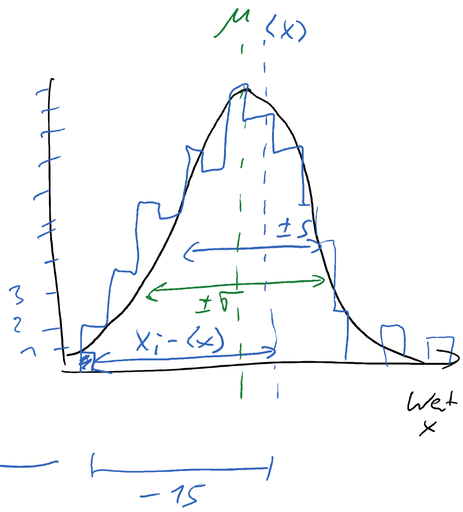
$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \xrightarrow{N \to \infty} \langle x \rangle = \mu$$

viele Messungen

- Standardabweichung

$$s = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2} \xrightarrow{N \to \infty} s = \sigma$$

$x_i$: Einzelmessung; $\langle x \rangle$: Mittelwert




- Fehler auf Mittelwert

$$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{N}} \xrightarrow{N \to \infty} \Delta x = 0$$

$s$ vs. $\Delta x$? versus

$s$: Erwartete Streuung einer Einzelmessung
(68% aller Messungen sind zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$)

$\Delta x$: Wie gut kennen wir Mittelwert $\mu$?
(Streuung von $\langle x \rangle$ um $\mu$)

⇒ statistischer Fehler der Messung