

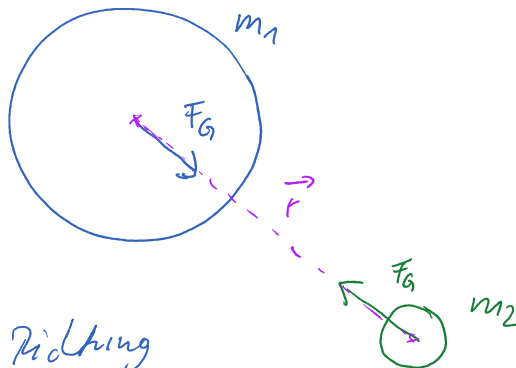
2.6. GRAVITATION

2.6.1. Gravitationsgesetz

- Richtung

$$\vec{F}_G \propto \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Gravitationskraft wirkt in Richtung
des Verbindungsvektors



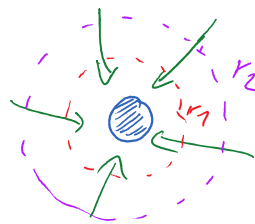
- Abhängigkeit von Massen

$$|\vec{F}_G| \propto m_1 \cdot m_2 \quad (\text{actio est reactio})$$

- Abhängigkeit vom Abstand

↳ Kraftfluß $\vec{F}A$ durch die Fläche $A = 4\pi r^2$ Kugeloberfläche
unabhängig von r

$$\hookrightarrow |\vec{F}_G| \propto \frac{1}{r^2}$$



Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Gravitationskonstante $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

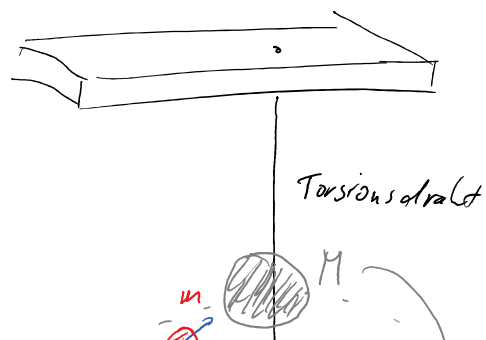
$$\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^2} \cdot 1 \quad \checkmark$$

Versuch Cavendish - Experiment 1797!

Torsionswaage

Rückstellende Kraft gegen
Rotation

m : Testmassen

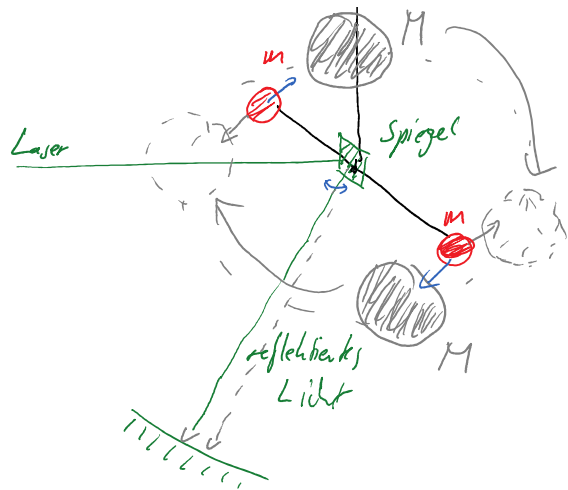


m : Test massen

M : große Masse

Auslenkung $\theta \propto$ Kraft
(Rotation)

$$F_T = -F_G$$



Nach Bewegung der großen Massen M

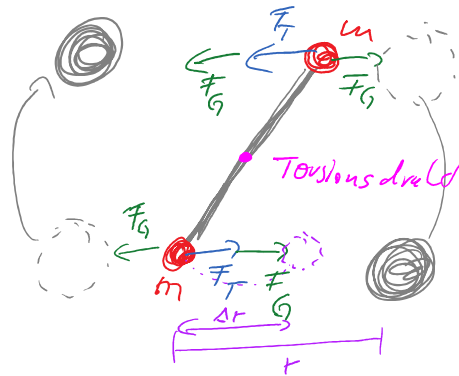
$\Rightarrow$ Beschleunigung der Testmassen m

$$F = F_G + F_T = 2F_G = m \cdot a$$

$\rightarrow$ Auslenkung

$$\Delta r = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\hookrightarrow \alpha = \frac{2 \Delta r}{t^2}$$



Auslenkung sehr klein

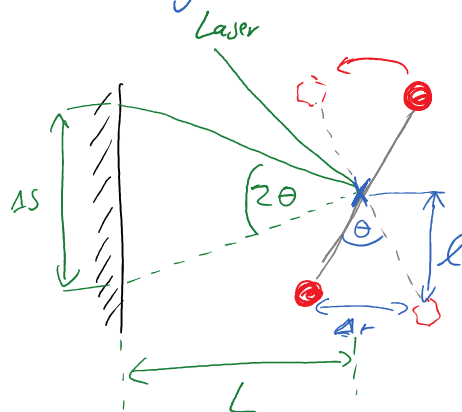
$\hookrightarrow$ Verstärkung des Signals (Auslenkung) mit Laser

$\rightarrow$ langer Hebelarm

Kleiwinkelnäherung

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{\Delta r}{l}$$

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$$



$$\theta \approx \frac{\Delta r}{l}$$

$$2\theta \approx \frac{\Delta S}{L} \Rightarrow \Delta r = \Delta S \cdot \frac{l}{2L}$$

Hebelarm zur Ablesung
 $\Delta S = \Delta r \cdot \frac{2L}{l} \ll 10 \text{ m}$

Einsehen

l_F dm

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{2\Delta r}{t^2} = m \frac{\Delta s}{t^2} \frac{l}{L} \stackrel{!}{=} 2 \cdot F_G = 2 \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

$$G = \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{t^2} \frac{l}{L} \frac{r^2}{M}$$

z.B.: $L = 10m$ $M = 1.5kg$

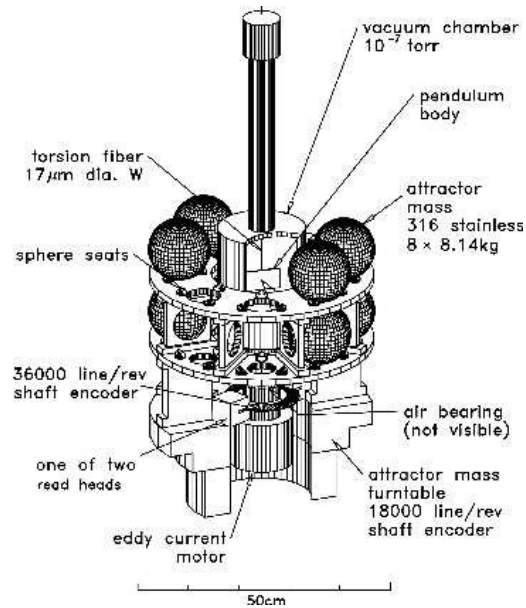
$l = 5cm$

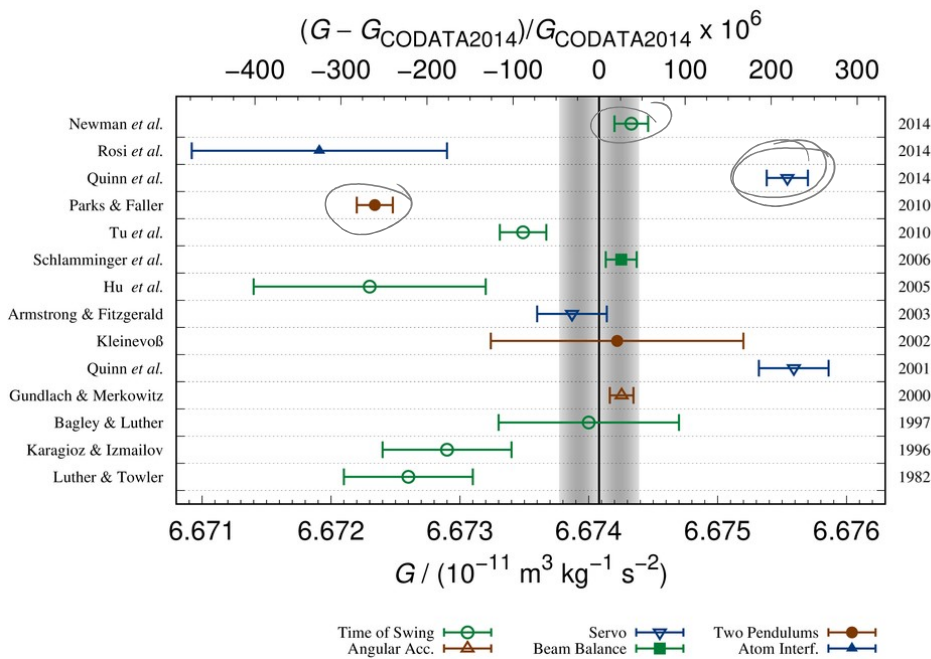
$r = 5cm$

Messung: $\Delta t = 90s$

$\Delta s = 14cm$

$\} \rightarrow G = 6 \dots 7 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$





Schlußfolgerungen:

- Masse der Erde $F = m \cdot a$

$$mg = G \cdot \frac{M_E \cdot m}{r_E^2}$$

$$\hookrightarrow M_E = \frac{g \cdot r_E^2}{G} = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (6.37 \cdot 10^6 m)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}} \approx 6 \cdot 10^{24} kg$$

- Dichte der Erde

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M_E}{V_E}$$

$$V_E = \frac{4}{3} \pi r_E^3$$

$$\hookrightarrow \rho \approx 5 \frac{g}{cm^3}$$

$$vs. \rho_{Stein} \approx 2 \dots 3 \frac{g}{cm^3}$$

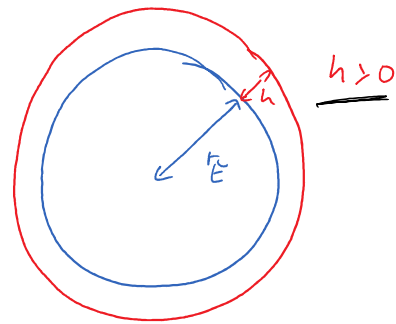
$\hookrightarrow$ Erde besitzt einen dichten (Eisen-) Kern!

Beschleunigung als Funktion des Abstandes

- außerhalb der Erde

$$g_E(h) = G \cdot \frac{M_E}{(r_E + h)^2} =$$

$$= G \frac{M_E}{r_E^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{r_E}\right)^2}$$



Taylor-Entwicklung

$$\approx g_E(r_E) \left(1 - 2 \cdot \frac{h}{r_E}\right)$$

z.B. Zugspitze $h = 3000 \text{ m}$
 $r_E = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$

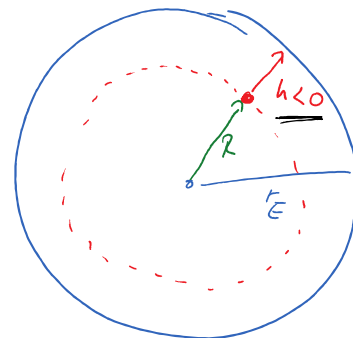
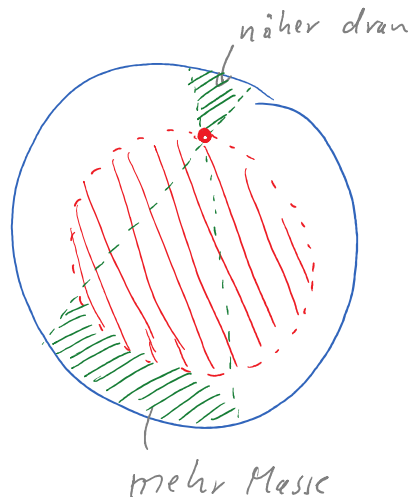
$$g(\text{Zugspitze}) = g_E (1 - 10^{-3})$$

aber Zugspitze = massiv

- innerhalb der Erde

Beiträge zu F_G in
 der äußeren Schale
 heben sich auf!

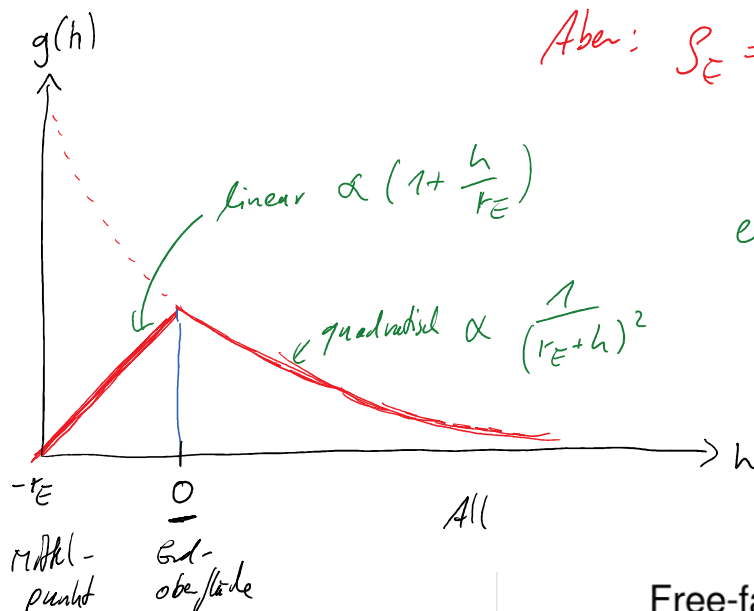
↳ nur Kugel
 innerhalb zählt!



$$R = r_E + h \quad (h < 0)$$

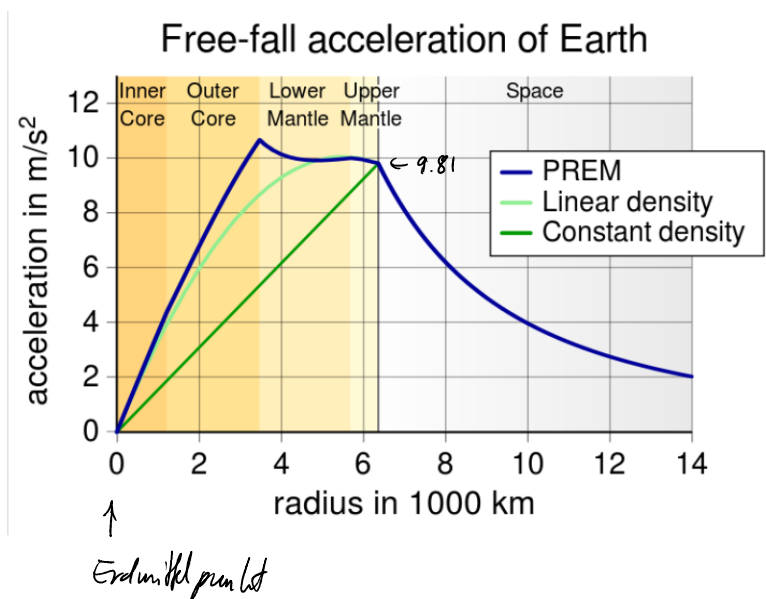
$$g(h) = G \cdot \frac{M(R)}{R^2} = G \cdot \frac{\rho_E \cdot \frac{4\pi}{3} (r_E + h)^3}{(r_E + h)^2}$$

$$= G \cdot \rho_E \cdot \frac{4\pi}{3} (r_E + h) = g_E \left(1 + \frac{h}{r_E}\right) \quad h < 0$$



Aber: $S_E = S_E(r)$ ist nicht konstant

einfaches Modell



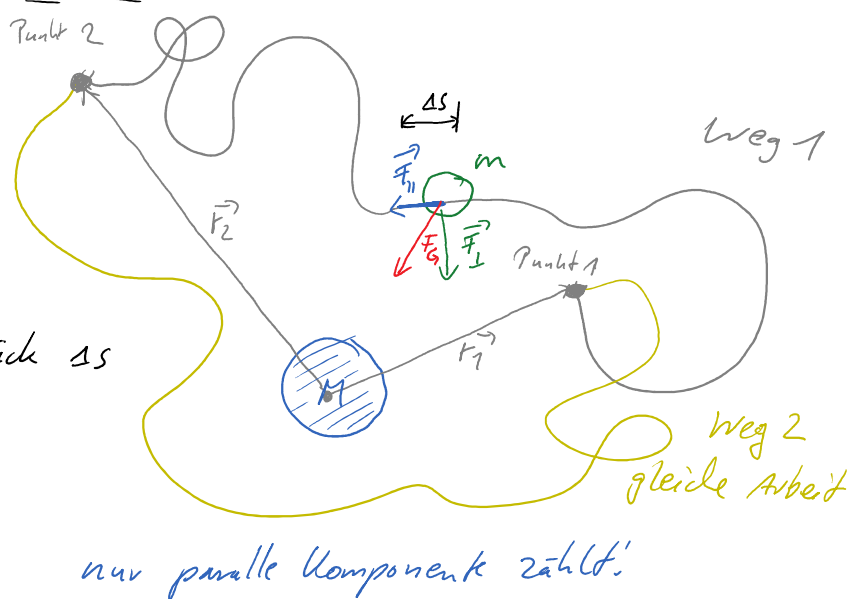
2.6.2. Arbeit im Gravitationsfeld

Bewege Masse m
von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$

Arbeit W für Teilstück Δs

$$W = \vec{F}_G \cdot \vec{\Delta s}$$

$$= F_{11} \cdot \Delta s$$



gesamter Pfad

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i$$



$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Energieerhaltung

$$\bullet V(\vec{r}_1) = V(\vec{r}_2) = 0 \rightarrow E_{\text{kin}}(\vec{r}_1) = E_{\text{kin}}(\vec{r}_2) = 0$$

↳ Bewegung abgeschlossen

• E-Erhaltung

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}_2) \stackrel{\substack{\uparrow \\ E_{\text{kin}}(\vec{r}_2)=0}}{=} E(\vec{r}_2) = E(\vec{r}_1) + W = E_{\text{pot}}(\vec{r}_1) + W$$

$$\Downarrow \boxed{E_{\text{pot}}(\vec{r}_2) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_1) = \Delta E_{\text{pot}} = W}$$

↑ potentielle Energie als gespeicherte Arbeit

Konsequenzen:

• $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(\vec{r})$: Arbeit ist vom Weg unabhängig!

• geschlossener Weg: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}_1) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_1) = 0 = W$$

↳ keine Arbeit: $W=0$

Gilt für alle konservativen Kräfte

↗
E-Erhaltung zwischen E_{pot} & E_{kin} ,
keine Reibung (Reibung = dissipativ)

2.6.3. POTENTIELLE ENERGIE IM GRAVITATIONSFELD

Bislang $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ mit $g = \text{const}$

aber $g = G \frac{M_E}{r^2} \Rightarrow g = g(r)$

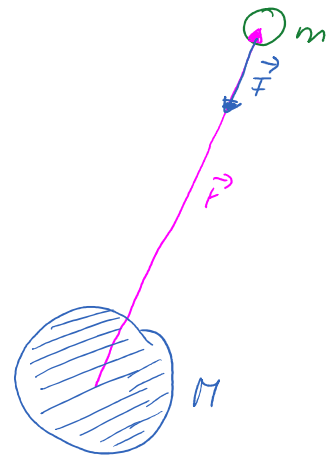
aber $g = G \frac{M_E}{r^2} \Rightarrow g = g(r)$

Gravitationskraft

$$\vec{F}_G = \vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Arbeit, um Masse m von ∞ nach $\vec{r}_0$ zu bewegen

$$\begin{aligned} \hookrightarrow W &= \int_{\infty}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \\ &= -G Mm \int_{\infty}^{\vec{r}_0} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = -G Mm \int_{\infty}^{\vec{r}_0} \frac{dr}{r^2} = \\ &= -G Mm \left[-\frac{1}{r_0} + \frac{1}{\infty} \right] = + \frac{G Mm}{r_0} \end{aligned}$$



Definition **potentielle Energie**:

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(\infty) - E_{\text{pot}}(\vec{r}) \stackrel{!}{=} W = \frac{G Mm}{r_0}$$

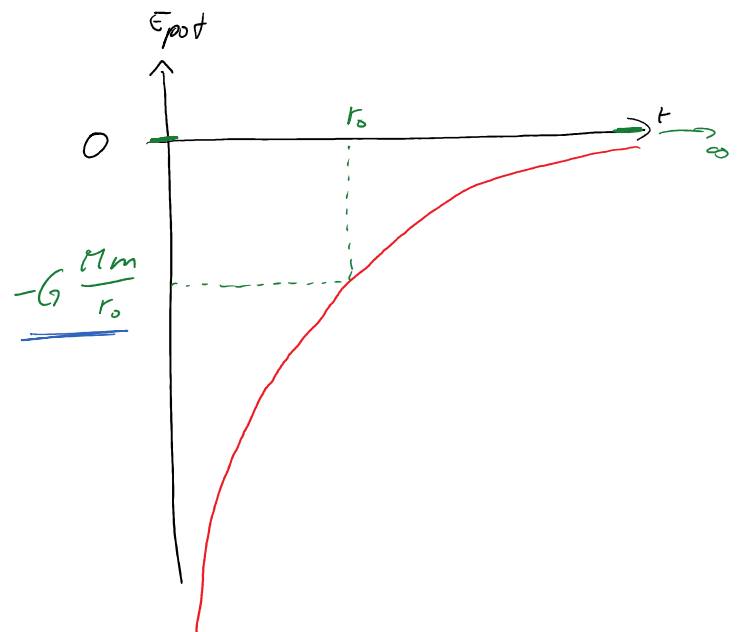
Arbeit, die bei Hind
brenn ein Körper
von ∞ nach $\vec{r}$ im
Gravitationsfeld fällt

Potentielle Energie bis auf frei
wählbare Konstante definiert.

vgl.: Wahl von h_0
in $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$

$\hookrightarrow$ Konvention: $E_{\text{pot}}(\infty) = 0$

$$E_{\text{pot}} = -G \frac{Mm}{r}$$



Wir müssen Energie zuführen

$\hat{=}$ Arbeit verrichten,

um die Masse m im Schwerfeld von M anzuheben

2.6.4. FLUCHTGESCHWINDIGKEIT

Welche Geschwindigkeit v_{Flucht} muß ein Objekt haben, um dem Schwerkfeld der Erde zu **entkommen**?

↳ Bedingung

$$E_{\text{kin}}(r \rightarrow \infty) \geq 0$$

$$E_{\text{pot}}(r \rightarrow 0) = 0$$

E-Erhaltung

$$E_{\text{kin}}(r) + E_{\text{pot}}(r) \geq 0$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{Flucht}}^2 - G \frac{M_E \cdot m}{r} \geq 0$$

↳
$$v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2 G M_E}{r_E}} = \sqrt{2 g r_E} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

