3. MECHANIK STARRER KÖRPER

- bislang : Massenpunkt
- jetzt : ausgedehnte Körper (nicht-deformierbar = starr)

3.1. Dichte und Schwerpunkt

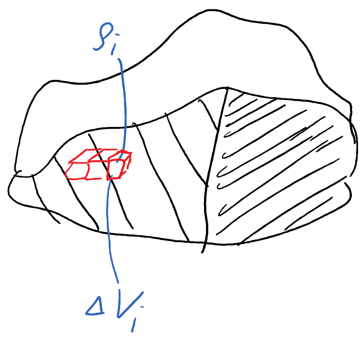
Dichte $\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$ Masse, Volumen $\left[\frac{kg}{m^3} \text{ bzw. } \frac{g}{cm^3} \right]$

"rho"

↳ mittlere Dichte

im Allgemeinen $\rho = \rho(\vec r)$ ortsabhängig

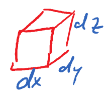
↳ aufgebaut aus Volumenelementen ΔV_i



$$m = \sum m_i = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum \rho_i \cdot \Delta V_i$$

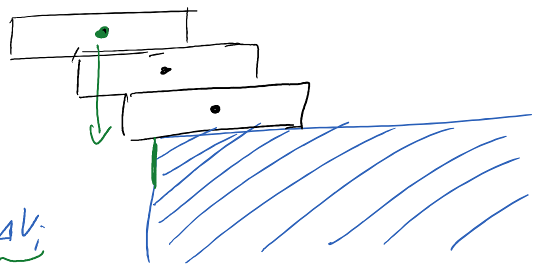
$$= \int_V \rho(\vec r)\, dV = \iiint \rho(\vec r)\, dx\, dy\, dz$$

Volumenintegral



Bei der Translation (Verschiebung) kann ein Körper wie ein Massenpunkt mit der Gesamtmasse im Schwerpunkt behandelt werden.
(gilt NICHT bei Rotation)

Schwerpunkt



$$\vec S = \frac{\sum m_i \vec r}{\sum m_i} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{1}{M} \sum \vec r_i \rho_i \Delta V_i$$

$$\vec{S} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{1}{M} \sum_i \vec{r}_i \underbrace{\rho_i \Delta V_i}_{m_i}$$

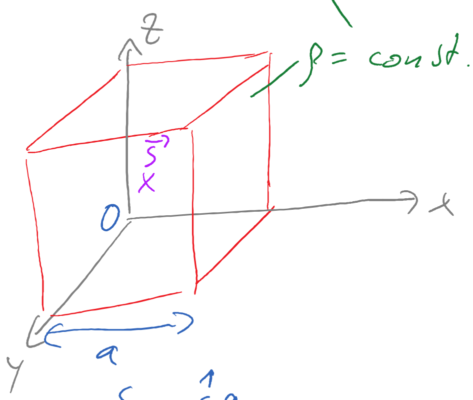
Gesamtmasse

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r})\, dV}$$

↳ Superpositionsprinzip : gilt für jede Komponente

$$S_x = \frac{1}{M} \int x \cdot \rho(x,y,z)\, dV = \frac{1}{M} \iiint x \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Beispiel: homogener Würfel Kantenlänge a



$S_x = \frac{1}{2} a$

Gesamtmasse

$$M = \int_V \rho \cdot dV =$$

$$= \int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \rho \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \underline{\underline{\rho a^3}} = \rho \cdot V$$

$\rho = \text{const}$

Schwerpunkt : z.B. x-Komponente

$$\underline{\underline{S_x}} = \frac{1}{\rho a^3} \cdot \int_0^a \int_0^a \int_0^a x \cdot \rho \cdot dx\, dy\, dz =$$

M

$$= \frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho} \cdot a^3} \int_0^a x\, dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{1}{a^3} \frac{1}{2} a^2 \cdot a \cdot a = \underline{\underline{\frac{1}{2} a}}$$

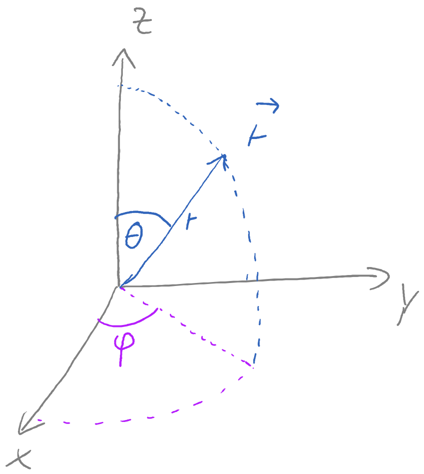
ebenso für y, z

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$$

Beispiel: homogene Halbkugel Radius R

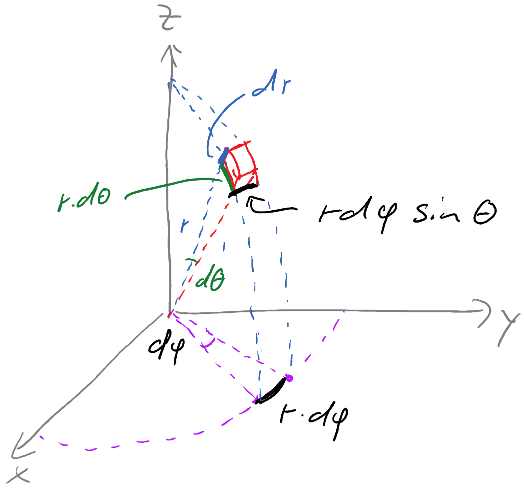
besser: Kugelkoordinaten

Radius	$r \in [0 \dots R]$	Kugelradius
Polarwinkel	$\theta \in [0 \dots \frac{\pi}{2}]$	π für Vollkugel
Azimuth	$\varphi \in [0 \dots 2\pi]$	



Volumenintegral

↳ Volumenelement dV an der Stelle r, θ, φ



$$\boxed{\begin{aligned} dV &= dr \cdot r\,d\theta \cdot \sin\theta\, r \cdot d\varphi \\ &= r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= r^2 \, dr \, d\cos\theta \, d\varphi \end{aligned}}$$

Gesamtmasse:

$$M = \int_V \rho \, dV = \int_0^R \int_{\underset{\uparrow \, \theta}{0}}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

Halbkugel

$$= \rho \, \frac{1}{3} R^3 \cdot \underbrace{\Big[\underbrace{-\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \underbrace{(-\cos 0)}_{-1}\Big]}_{+1} \cdot 2\pi = \rho \cdot \frac{2}{3} \pi R^3$$