3. MECHANIK STARRER KÖRPER

- bislang : Massenpunkt
- jetzt : ausgedehnte Körper (nicht-deformierbar = starr)

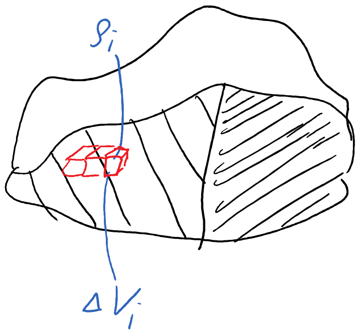
3.1. Dichte und Schwerpunkt

Dichte $\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$ Masse, Volumen $\left[\frac{kg}{m^3} \text{ bzw. } \frac{g}{cm^3} \right]$

"rho"

↳ mittlere Dichte

im Allgemeinen $\rho = \rho(\vec{r})$ ortsabhängig

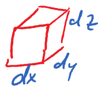


↳ aufgebaut aus Volumenelementen ΔV_i

$$m = \sum_i m_i = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum \rho_i \cdot \Delta V_i$$

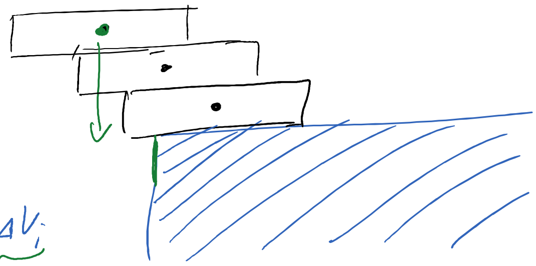
$$= \int_V \rho(\vec{r})\, dV = \iiint \rho(\vec{r})\, dx\, dy\, dz$$

Volumenintegral



Bei der Translation (Verschiebung) kann ein Körper wie ein Massenpunkt mit der Gesamtmasse im Schwerpunkt behandelt werden.

(gilt NICHT bei Rotation)



Schwerpunkt

$$\vec{S} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{1}{M} \sum_i \vec{r}_i \underbrace{\rho_i \Delta V_i}_{m_i}$$

Gesamtmasse

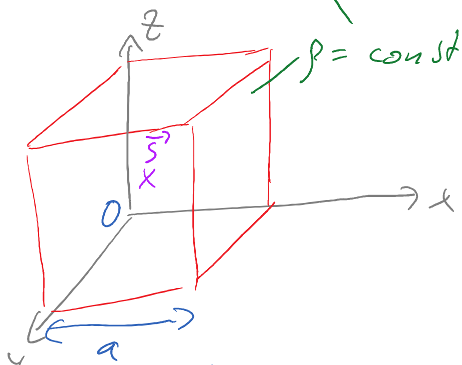
$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r})\, dV}$$

→ Superpositionsprinzip: gilt für jede Komponente

$$S_x = \frac{1}{M} \int x \cdot \rho(x,y,z)\, dV = \frac{1}{M} \iiint x \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Beispiel: homogener Würfel Kantenlänge a

$\rho = \text{const.}$



$S_x = \frac{1}{2} a$

Gesamtmasse

$$M = \int_V \rho \cdot dV =$$

$$= \int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \rho \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \rho a^3 = \rho \cdot V$$

$\rho = \text{const}$

Schwerpunkt: z.B. x-Komponente

$$S_x = \frac{1}{\underbrace{\rho a^3}_{M}} \cdot \int_0^a \int_0^a \int_0^a x \cdot \rho \cdot dx\, dy\, dz =$$

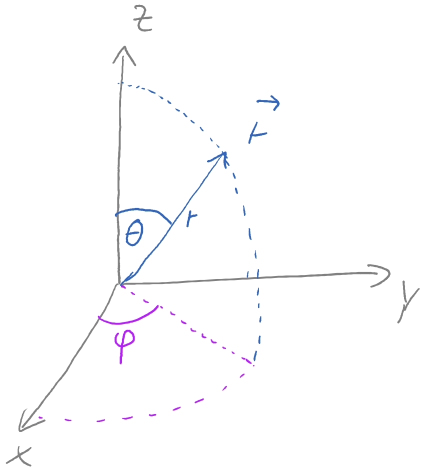
$$= \frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho} \cdot a^3} \int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{1}{a^3} \frac{1}{2} a^2 \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} a$$

$$= \frac{\cancel{8}}{\cancel{8}\cdot a^3}\int_0 x\,dx \int_0 dy \int_0 dz = \frac{1}{a^3}\,\frac{1}{2}a^2\cdot a\cdot a = \frac{1}{2}a$$

ebenenso für y, z

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$$

Beispiel: homogene Halbkugel Radius R

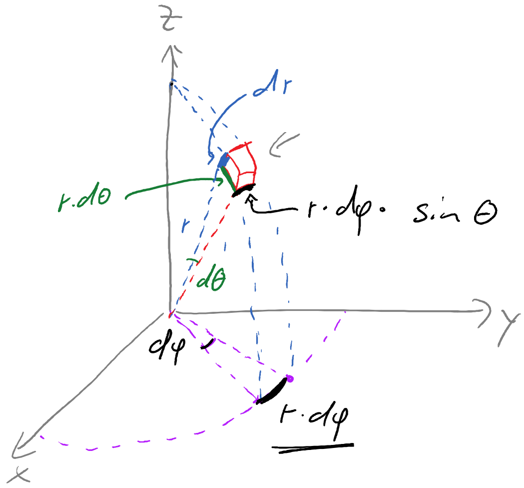


besser: Kugelkoordinaten

Radius	$r \in [0 \ldots R]$	Kugelradius
Polarwinkel	$\theta \in [0 \ldots \frac{\pi}{2}]$	π für Vollkugel
Azimuth	$\varphi \in [0 \ldots 2\pi]$	

Volumenintegral

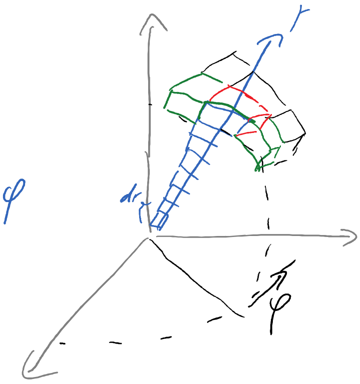
↳ Volumenelement dV an der Stelle r, θ, φ



$$\boxed{\begin{aligned} dV &= dr \cdot r\,d\theta \cdot \sin\theta \cdot r \cdot d\varphi \\ &= r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= r^2 \, dr \, d\cos\theta \, d\varphi \end{aligned}}$$

Gesamtmasse:

$$M = \int_V \rho \, dV = \int_0^R \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\theta} \int_0^{2\pi} \rho\, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$



$$= \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \rho \, \frac{1}{3} R^3 \cdot \left[-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \right] \cdot 2\pi = \rho \cdot \frac{2}{3}\pi R^3$$

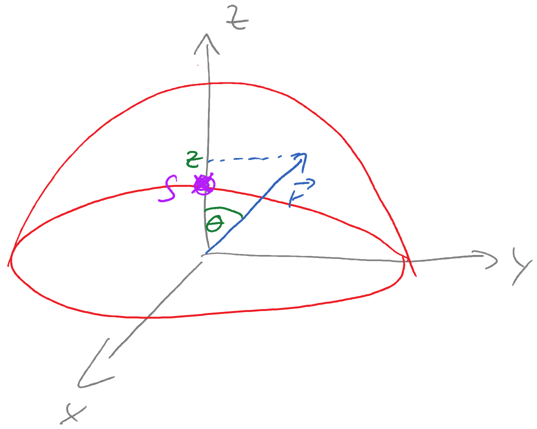
Halbkugel

$$= \rho \, \frac{2}{3} R^3 \cdot \underbrace{\Big(\underbrace{-\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \underbrace{(-\cos 0)}_{-1} \Big)}_{+1} \cdot 2\pi = \rho \cdot \frac{2}{3} \pi R^3$$

Schwerpunkt

Symmetrie um z Achse

↳ $S_x = S_y = 0$



z-Komponente

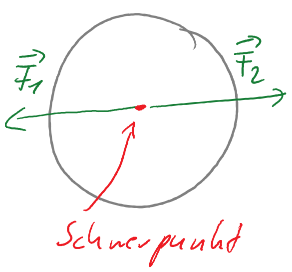
$$S_z = \frac{\cancel{\rho} \leftarrow \rho = \text{const}}{\cancel{\rho} \cdot \frac{2}{3}\pi R^3} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \underbrace{z}_{r \cdot \cos\theta} \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi =$$

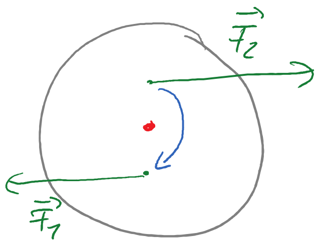
$$= \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos\theta \sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin 2\theta} \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}\cancel{\pi} R^3} \, \frac{1}{4} R^4 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \Big[\underbrace{-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} - \underbrace{\left(-\cos^2(0)\right)}_{-1} \Big] \cdot \cancel{2\pi} =$$

$$= \frac{3}{8} R$$

3.2. DREHMOMENT





$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

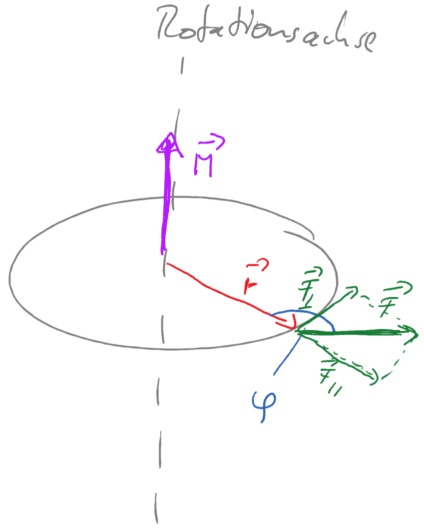
↳ Körper bleibt in Ruhe

Körper dreht sich

Kräfte, die nicht am Schwerpunkt angreifen, üben ein Drehmoment aus.

Drehmoment

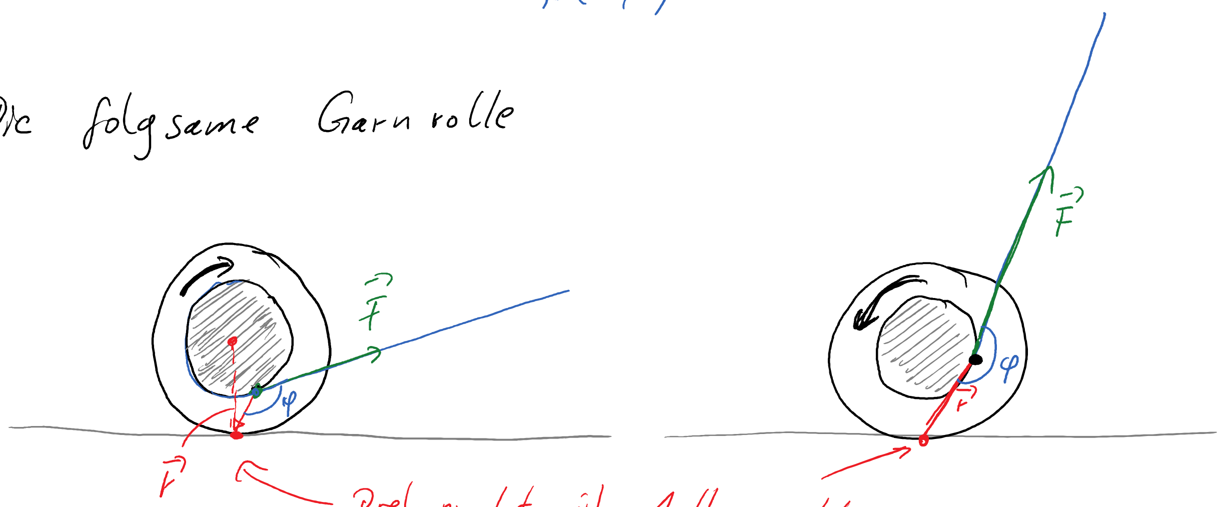
$$\boxed{\vec M = \vec r \times \vec F} \quad [Nm]$$



- nur die senkrechte Kraftkomponente zählt
- $\vec M$ zeigt in Richtung der Drehachse

$$|\vec M| = |\vec r|\cdot|\vec F|\cdot\underbrace{\sin\varphi}_{\sphericalangle(\vec r,\vec F)} = |\vec r|\cdot|\vec F_\perp|$$

Die folgsame Garnrolle



folgsame

$\varphi < \pi \rightarrow \sin\varphi > 0$

↳ $M > 0$ (in die Bildebene)

störrische

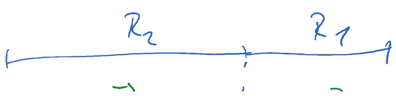
$\varphi > \pi \rightarrow \sin\varphi < 0$

↳ $M < 0$ (aus Bildebene)

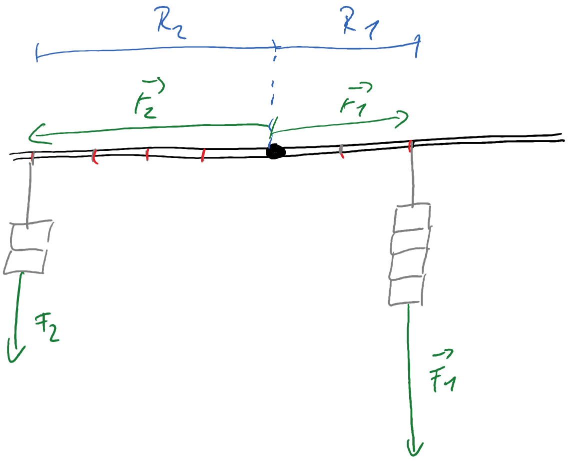
Grenzfall $\varphi = \pi$ (Faden zeigt in Richtung Auflagepunkt)

↳ $M = 0 \rightarrow$ Rolle rutscht.

Hebelgesetz:



Hebelgesetz:



Gleichgewicht:

$\vec{M}_{ges} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{R_1 \cdot F_1 = R_2 \cdot F_2}$

3.3. TRÄGHEITSMOMENT

- lineare Bewegung

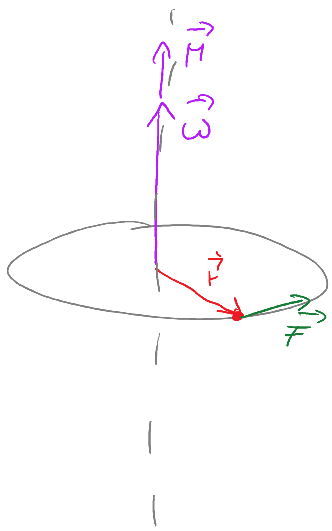
$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dot{\vec{v}} \rightarrow \vec{F} \parallel \vec{a}$

träge Masse — lineare Beschleunigung

- Kreisbewegung

$\boxed{\vec{M} = \Theta \cdot \dot{\vec{\omega}}} \rightarrow \vec{M} \parallel \dot{\vec{\omega}}$

Trägheits-moment — Winkelbeschleunigung

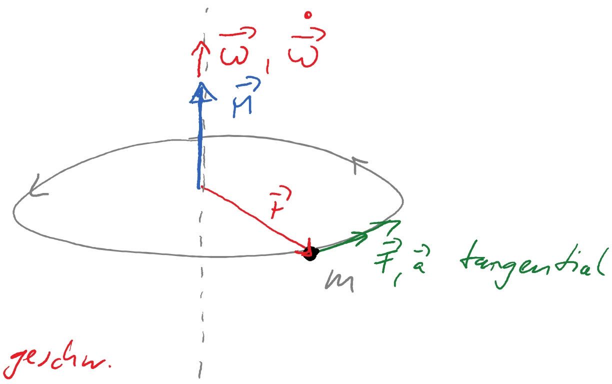


↳ Drehmoment beschleunigt / bremst die Drehbewegung

↳ Trägheitsmoment $\hat{=}$ Widerstand gegen Änderung der Drehbewegung

3.3.1. Punktmasse

auf Kreisbahn



$$M = r \cdot F = r \cdot m \cdot a_{tangential}$$

$$= r \cdot m \cdot \frac{dv_{Bahn}}{dt}$$ ← Änderung der Bahngeschw.

$$= r \cdot m \cdot r \cdot \frac{d\omega}{dt}$$ ← Änderung der Winkelgeschw. ≙ Winkelbeschleunigung

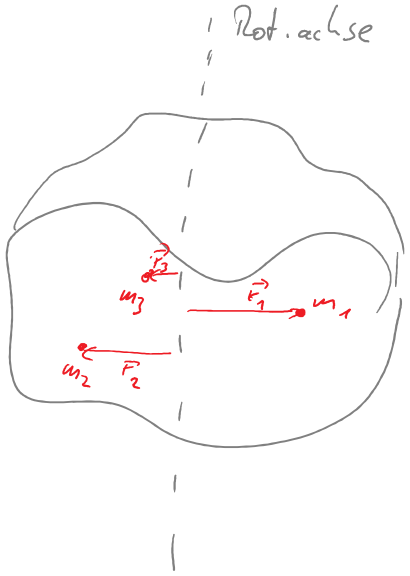
$$= \underbrace{mr^2}_{} \cdot \dot{\omega}$$

Trägheitsmoment Θ [kg m²]

$$\boxed{\Theta = m r^2}$$

3.3.2. AUSGEDEHNTER KÖRPER

↳ viele Punktmassen



$$\Theta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \sum_i r_i^2 \cdot \Delta m_i$$

↳ Übergang zu kontinuierlicher Verteilung

$$\boxed{\Theta = \int_V r^2 \, dm \overset{\Delta m_i = \rho_i \cdot \Delta V_i}{=} \int_V \rho(r)\, r^2 \, dV}$$

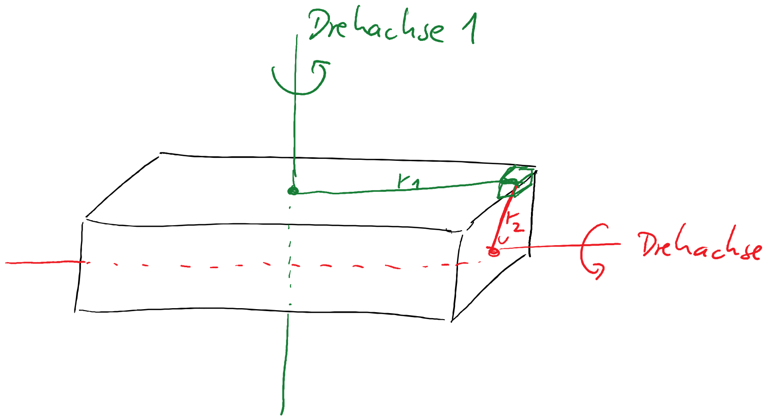
$$\left[\frac{kg}{m^3} \cdot m^2 \cdot m^3 = kg \cdot m^2 \right]$$

vgl. Gesamtmasse $m = \int_V \rho(r)\, dV = \sum_i m_i$

Θ: bei konstanter Dichte $\rho(r) = \text{const}$

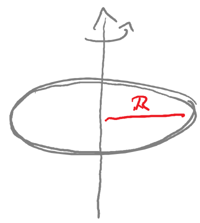
$$\Theta = \rho \cdot \int_V r^2 dV$$

$\Rightarrow$ hängt von der Geometrie des Körpers und von der Lage der Drehachse ab!



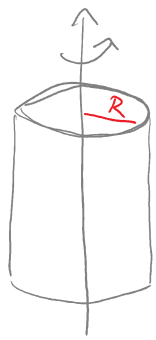
Beispiele:

- dünner Ring



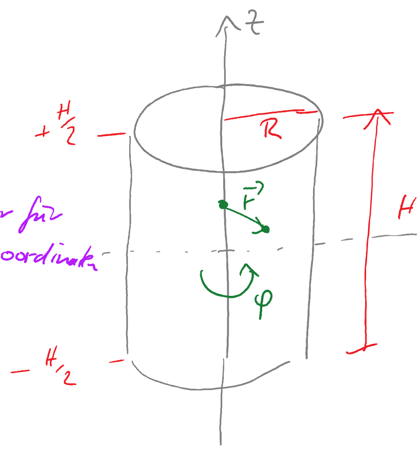
$\hookrightarrow \Theta = m \cdot R^2$

- dünner Hohlzylinder



$\hookrightarrow \Theta = m \cdot R^2$

- Vollzylinder



$$\Theta = \rho \int_V r^2 dV$$

Zusatzfaktor für Zylinderkoordinaten

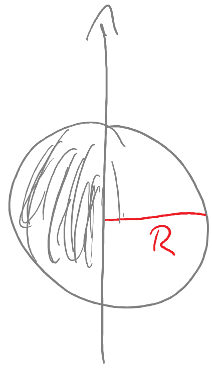
$$= \rho \cdot \int_{-H/2}^{H/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r\, dr$$

$$= \rho \left[\frac{H}{2} - \left(-\frac{H}{2}\right)\right] \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} R^4 =$$

$$= \underbrace{\rho \cdot \underbrace{H \pi R^2}_{\text{Volumen}}}_{\text{Gesamtmasse des Zylinders}} \cdot \frac{1}{2} R^2 = \boxed{\frac{1}{2} m R^2}$$

- Vollkugel

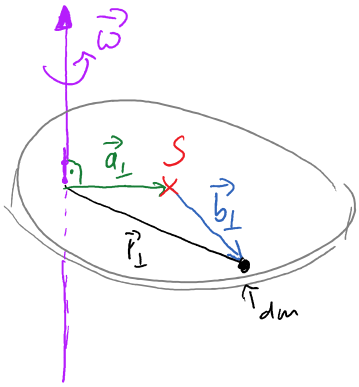
$$\boxed{\Theta = \frac{2}{5} m R^2}$$



3.3.3. SATZ VON STEINER

Achtung: Θ hängt von der Lage der Drehachse ab!

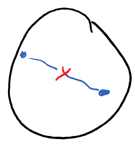
Was tun wenn Schwerpunkt nicht auf der Drehachse



$$\Theta = \int_V \rho \cdot r_\perp^2 \, dV$$

const!

$$= \int_V \rho \left(\vec{a}_\perp + \vec{b}_\perp \right)^2 dV =$$



$$= a_\perp^2 \int_V \rho \, dV + \int_V \rho \, b_\perp^2 \, dV + \cancel{2\rho \cdot \vec{a}_\perp \int_V \vec{b}_\perp \, dV}$$

$= 0$ wegen Schwerpunkt

$$\boxed{\Theta = a_\perp^2 \cdot m + \Theta_S}$$

Satz v. Steiner

$a_\perp$: Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt

Θ_S: Trägheitsmoment bzgl. des Schwerpunktes