3.4 ROTATIONSENERGIE

Dienstag, 2. Juni 2020 11:09

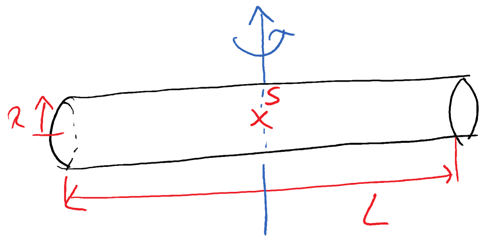
Satz von Steiner

$$\Theta = \Theta_S + a_\perp^2 \cdot m$$

Θ_S: Achse durch Schwerpunkt

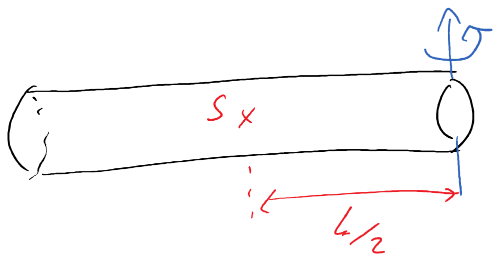
$a_\perp$: Abstand zur Drehachse

Bsp: Stab (Vollzylinder, andere Drehachse)



$$\Theta_{Mitte} = \frac{1}{12} m L^2$$

durch S



$$\Theta_{Ende} = \Theta_{Mitte} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m$$

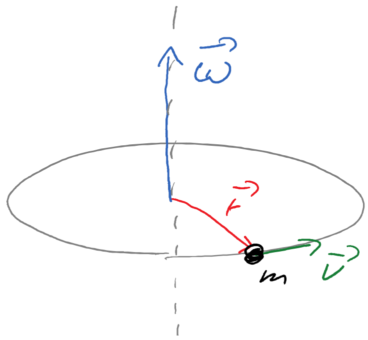
$$= \frac{1}{12} m L^2 + \frac{1}{4} m L^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} m L^2}}$$

3.4. ROTATIONSENERGIE

- lineare Bewegung : Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$
- Rotation : Rotationsenergie

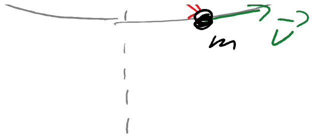
$$\boxed{E_{Rot} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2} \qquad \left[kg\, m^2 \cdot \frac{1}{s^2} = 1 J\right] ✓$$

≙ Bewegungsenergie der Massenpunkte



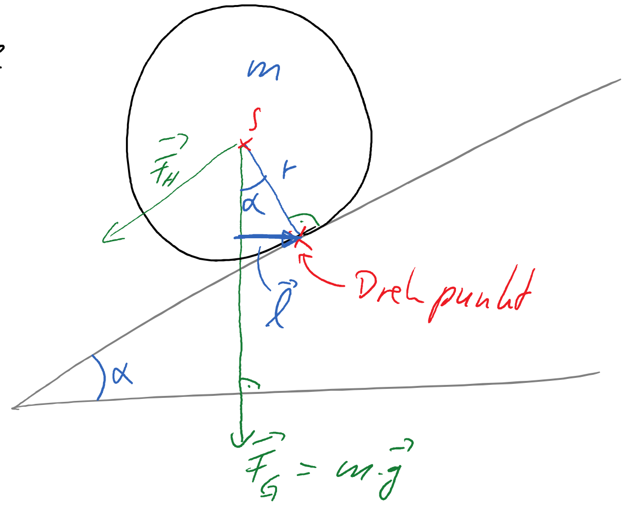
$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = E_{Rot}$$



$$= \frac{1}{2}\underbrace{m r^2}_{\Theta}\omega^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = E_{Rot}$$

Versuch: Rollen auf schiefer Ebene
(Vollzylinder)



Drehmoment

$$\vec{\ell}\times\vec{F} = \vec{M} = \Theta\cdot\dot{\vec{\omega}}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$r\cdot\sin\alpha\cdot m\cdot g = M = \Theta\cdot\frac{\dot{v}}{r} = a\cdot\frac{\Theta}{r}$$

$\dot{v} = a$

Θ: Satz von Steiner $\quad \Theta = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$

$$\Rightarrow a = \frac{\cancel{r^2}\sin\alpha\cdot\cancel{m}\cdot g}{\frac{3}{2}\cancel{m}\cancel{r^2}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}g\sin\alpha}}$$

Vgl: Gleiten

$$F_H = m\cdot g\cdot\sin\alpha = m\cdot a \rightarrow a_{Gleiten} = \underline{\underline{g\cdot\sin\alpha}}$$

Geschwindigkeit am Ende: Energieerhaltung

$$E_{ges} = const \rightarrow E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}$$

$$m\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

$\Theta \rightarrow \frac{1}{2}mr^2$, $\omega^2 \rightarrow \frac{v^2}{r^2}$

$$\cancel{m}\cdot g\cdot h = \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}v^2}_{E_{kin} = 67\%} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\cancel{m}v^2}_{E_{rot} = 33\%}$$

$E_{kin} = 67\%$ $\quad$ $E_{rot} = 33\%$

$\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{3} \leftarrow \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

$\frac{2}{4} : \frac{1}{4} = 2:1$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}g\cdot h}$$

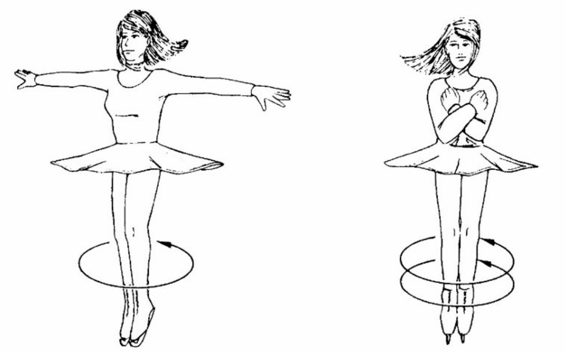
Vgl.: Gleiten

Vgl.: Gleiten

$$E_{pot} = E_{kin} \rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{2 g \cdot h}$$

$\Rightarrow$ Beim Rollen geht $\frac{1}{3}$ der Energie in die Rotation und nicht in die Translation (lineare Bewegung).

3.5. DREHIMPULS



- lineare Bewegung Impulserhaltung

  $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = const.$

Ballerina dreht sich schneller nachdem sie ihre vorher ausgestreckten Arme an den Körper angelegt hat.

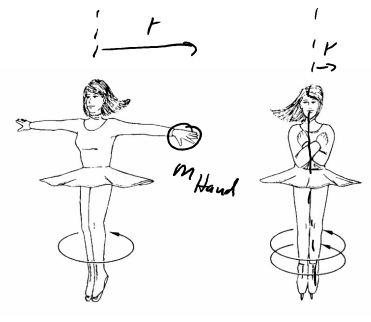
- Drehbewegung Drehimpulserhaltung

$$\rightarrow \boxed{\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}} \qquad \left[kg\, m^2 \cdot \frac{1}{s} = \frac{kg\, m^2}{s} \right] = const$$

Drehimpuls

Trägheitsmoment

Winkelgeschwindigkeit



Ballerina:

$L = const.$

Θ wird kleiner (weil r kleiner)

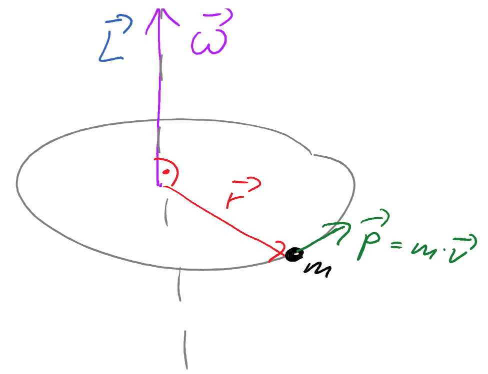
$\hookrightarrow m_{Hand} \cdot r^2$ quadratisch mit r $\rightarrow$ großer Effekt!

$\Rightarrow \omega$ wird größer

Drehimpuls eines Massenpunktes

$\vec{L} \uparrow \vec{\omega}$

Drehimpuls eines Massenpunktes



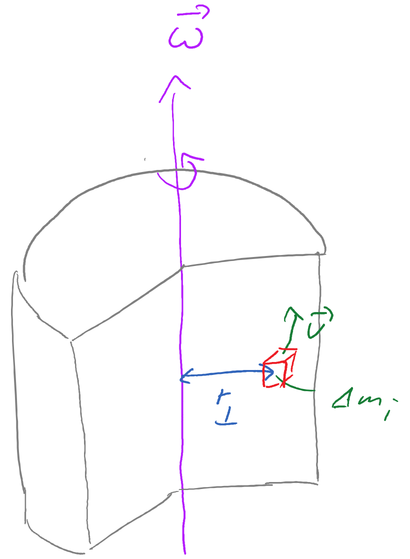
Es gilt: $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v} \quad | \cdot m;\ \vec{r}\times$

$$m\,\underbrace{(\vec{r}\times \vec{\omega}\times\vec{r})}_{\parallel \vec{\omega} \text{ weil } \sin\sphericalangle \vec{r},\vec{\omega} = 1} = \vec{r}\times \underbrace{m\cdot\vec{v}}_{\vec{p}}$$

$$\underbrace{\underbrace{m\,|\vec{r}|^2}_{\Theta}\cdot\vec{\omega}}_{\vec{L}} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}}$$

Drehimpuls eines starren Körpers



Rotationsgeschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \Rightarrow v = \omega\cdot r_\perp$$

$$p_i = \Delta m_i \cdot v_i = \Delta m_i \cdot \omega \cdot r_\perp$$

$$L_i = r_\perp \cdot p_i = r_\perp \cdot \Delta m_i \cdot \omega \cdot r_\perp =$$

$$= \Delta m_i \cdot r_\perp^2 \cdot \omega$$

Für den ganzen Körper

$$L = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i \cdot r_\perp^2 \cdot \omega = \omega \cdot \underbrace{\int_V r_\perp^2\, dm}_{\Theta} = \Theta\cdot\omega \quad ✓$$

Drehimpulserhaltung:

In einem abgeschlossenen System (kein äußeres Drehmoment) bleibt der Gesamtdrehimpuls in Betrag und Richtung erhalten

Achtung: Drehimpuls $\vec{L}$ muss nicht immer parallel zu $\vec{\omega}$ sein!

Drehimpuls und Drehmoment

analog zu Impuls und Kraft

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \underline{\vec{r} \times \vec{F}} = \underline{\vec{M}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$ (wieder komponentenweise)

↳ für $\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const}$

Änderung des Drehimpulses ist mit einem Drehmoment verbunden

Noether-Theorem: Erhaltungssätze sind mit Symmetrien verbunden

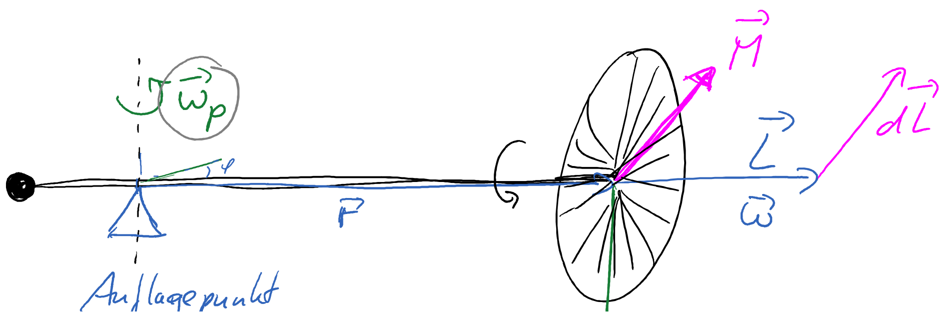
E-Erhaltung: Zeit

p-Erhaltung: Raum homogen

L-Erhaltung: Raum isotrop

3.5.1. PRÄZESSION

rotierender Reifen



äußeres Drehmoment $\vec M = \vec r \times \vec F_G = \frac{d\vec L}{dt}$

Richtungen $\vec M \parallel d\vec L$ und $d\vec L \perp \vec L$

→ kontinuierliche Kreisbewegung von $\vec L$ und $\vec \omega$

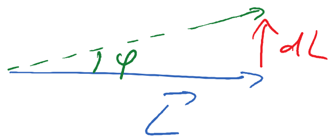
= Präzession

Präzessionsfrequenz

Kleinwinkelnäherung

$M = \frac{dL}{dt}$

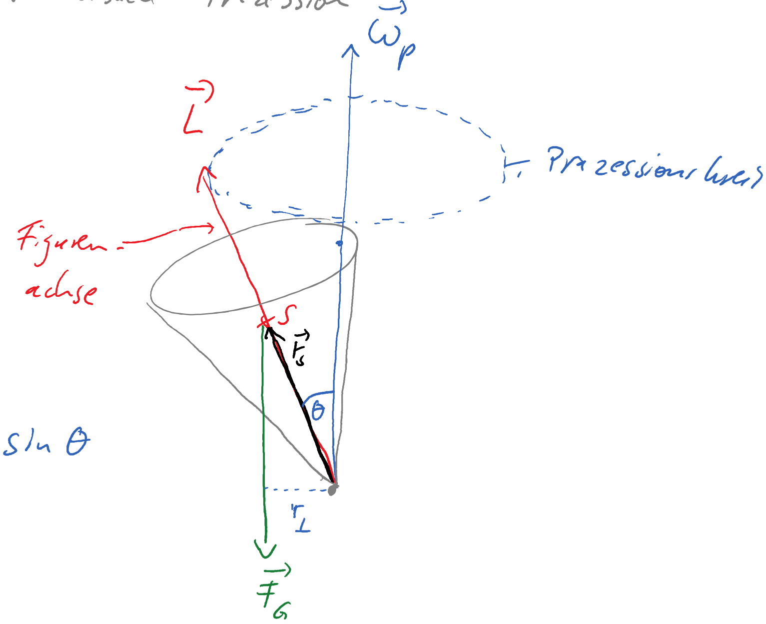
$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{L \cdot dt} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \frac{M}{L}$$



↳ $$\boxed{\vec M = \vec \omega_p \times \vec L}$$

nur senkrechte Komponente verursacht Präzession

→ Spielzeugkreisel



Präzession

$$|\vec M| = |\vec \omega_p \times \vec L| = \omega_p \cdot L \cdot \sin\theta$$

↳ $$\omega_p = \frac{M}{L \cdot \sin\theta}$$

mit $M = F_G \cdot \underbrace{r_S \cdot \sin\theta}_{r_\perp}$

$$\Rightarrow \omega_p = \frac{F_G \cdot r_S \cdot \cancel{\sin}\theta}{L \cdot \cancel{\sin}\theta} = \frac{r_S \cdot F_G}{L}$$

Präzessionsfrequenz ω_p ist unabhängig von Θ!

Präzession tritt immer dann auf, wenn ein Drehmoment $\vec{M}$ nicht parallel zur Drehachse $\vec{\omega}$ wirkt.