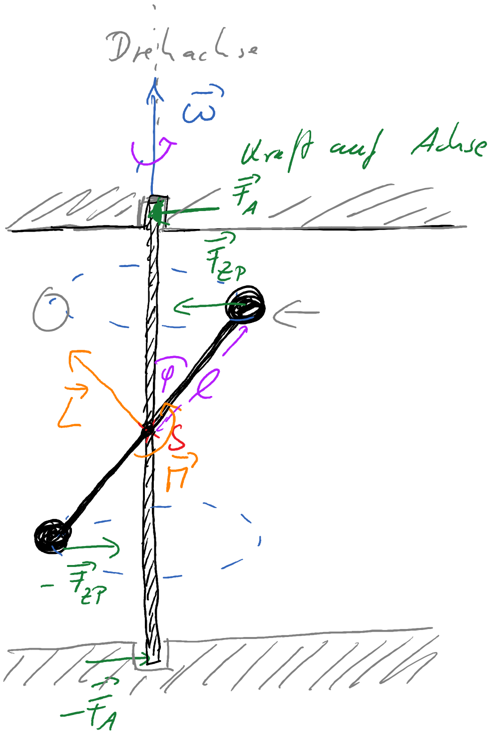
3.5.2. ASYMMETRISCHER ROTIERENDER KÖRPER

Bislang: Körper symmetrisch um die Drehachse

↳ Drehachse geht durch den Schwerpunkt S

ACHTUNG: Umgekehrte Folgerung gilt nicht automatisch!

z.B.

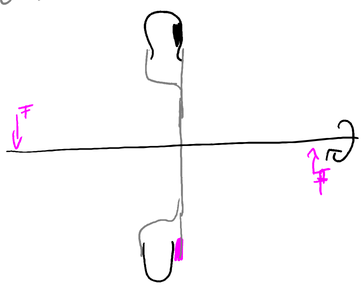


Zentripetalkraft

$F_{ZP} = \omega^2 r_\perp = \omega^2 \ell \sin\varphi \propto F_A$ ‚proportional'

muß durch die Lagerung aufgenomme werden ⇒ Unwucht

Autoreifen „auswuchten"



$F \propto \omega^2$

↳ wichtig für hohes Tempo!

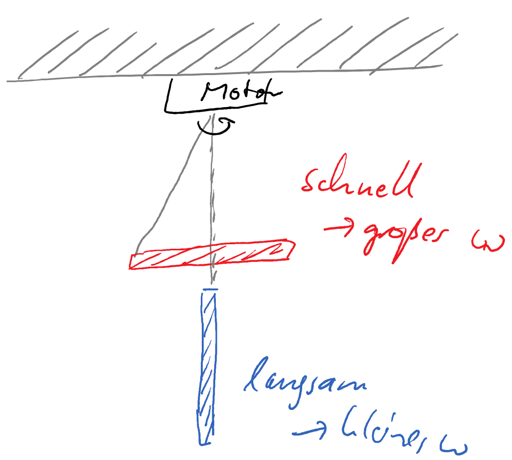
Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ nicht parallel zu $\vec{\omega}$

↳ rotiert mit wegen Drehmoment $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Drehung um eine Achse ≠ Symmetrieachse ist nicht stabil.

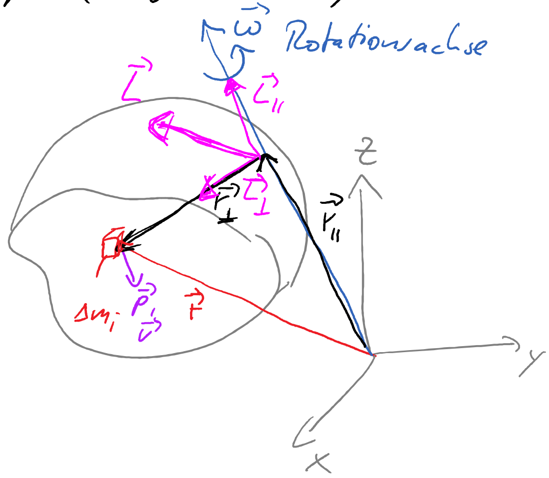
kleines ω → Rotation um Achse mit kleinen Trägheitsmoment Θ

großes ω → kleine Störung bewirkt Instabilität → Rotation um Achse mit großem Θ



Trägheitsmoment asymmetrischer Körper

Drehachse ist keine Symmetrieachse des Körpers (Figurenachse)



Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

hier

$$\vec{L} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \vec{r} \times (\vec{v} \cdot \Delta m_i)$$

$$= \int_V \vec{r} \times \vec{v}\, dm = \int_V \underset{a}{\vec{r}} \times (\underset{b}{\vec{\omega}} \times \underset{c}{\vec{r}})\, dm$$

mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{c}}_{r^2}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\vec{L} = \int_V \vec{\omega} \cdot r^2\, dm - \int_V \vec{r}\, \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}\, dm$$

mit $\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \rightarrow (\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp) \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\parallel + \underbrace{\cancel{\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\perp}}_{0})$

$$\vec{L} = \int_V \vec{\omega}\, \underbrace{(r^2 - r_\parallel^2)}_{= r_\perp^2 \text{ Pythagoras}}\, dm - \int_V \vec{r}_\perp \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\parallel)\, dm$$

$= r_\perp^2$ Pythagoras

$\hookrightarrow \vec{L}_{\parallel} \parallel \vec{\omega}$ (bekannt)

wie vorher: $\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$

$\hookrightarrow \vec{L}_{\perp} \perp \vec{\omega}$ (neu!)

Drehimpulskomponente senkrecht zu $\vec{\omega}$!

Konsequenzen:

- Trägheitstensor

$\vec{L} = \tilde{\Theta}\, \vec{\omega}$ aber $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

! kann nicht durch $\vec{L} = \ldots \cdot \vec{\omega}$ beschrieben werden

$\hookrightarrow \tilde{\Theta}$ ist ein Tensor

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}}_{=\vec{L}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}}_{\tilde{\Theta}} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}}_{\vec{\omega}}$$

z.B.: $L_x = \Theta_{xx} \cdot \omega_x + \Theta_{xy} \cdot \omega_y + \Theta_{xz} \cdot \omega_z$

z.B. Rotation mit $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix}$ entlang y-Achse

Tensor bewirkt auch Komponenten entlang x, z über

Θ_{xy} Θ_{zy}

$$L_x = \Theta_{xx} \cdot \cancel{\omega_x}^{\,0} + \Theta_{xy} \cdot \omega_y + \Theta_{xz} \cdot \cancel{\omega_z}^{\,0}$$

- Drehimpulserhaltung

$\vec{L} = const$ aber $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

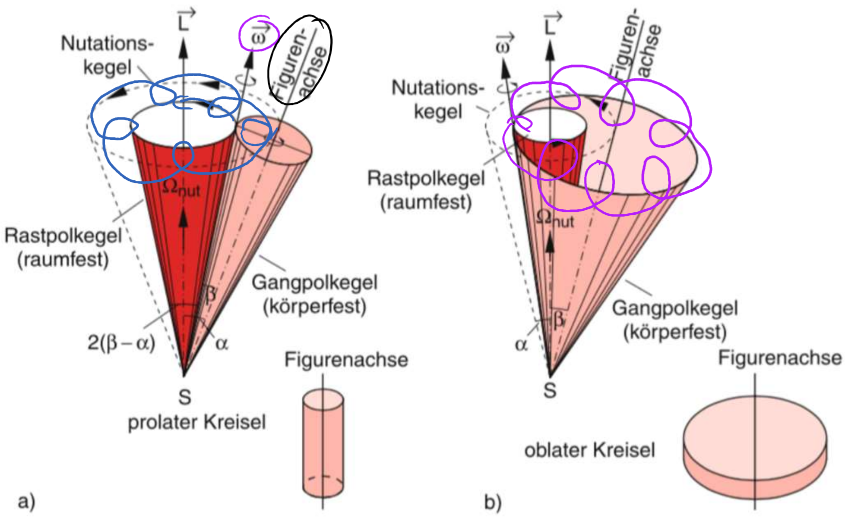
↳ $\vec{\omega}$ verändert seine Richtung !

zu jedem Zeitpunkt

$$\vec{L} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp} = \Theta_{FA} \cdot \vec{\omega}_{FA} + \Theta_{\perp} \cdot \vec{\omega}_{\perp}$$

"Figurenachse"

↳ Verursacht Nutation



Drehimpuls $\vec{L} = const.$

Winkelgeschw. $\vec{\omega}$

↳ dreht um $\vec{L}$

Figurenachse

↳ dreht um $\vec{\omega}$

↳ Nutation