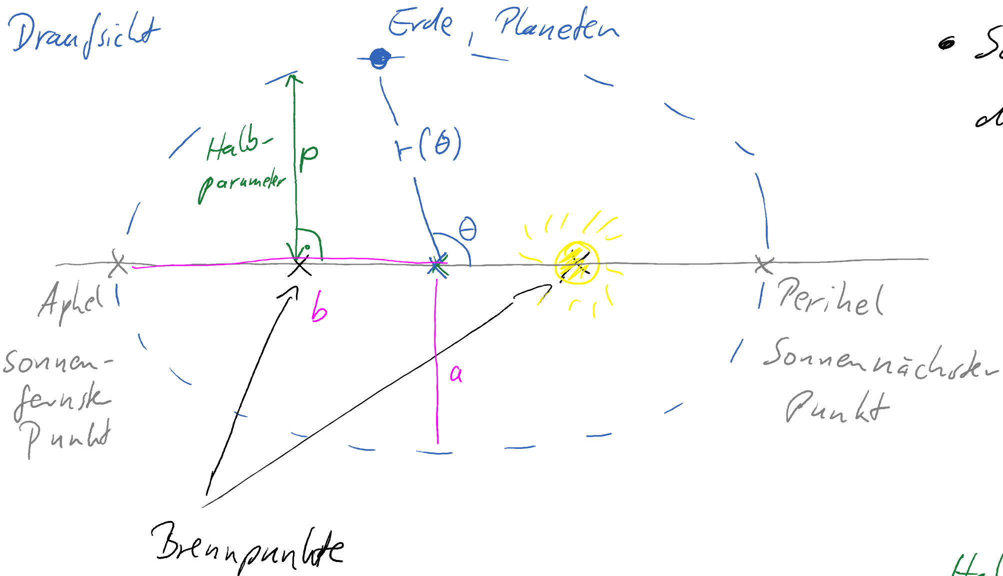
3.6. KEPLERSCHE GESETZE

↳ 1571 – 1630

Beschreibung der Planetenbahnen

bereits vor der Entdeckung des Gravitationsgesetzes

1. Planetenbahnen sind Ellipsen



- Sonne sitzt in einem der 2 Brennpunkte

- Bewegungsgleichung $r(\theta) = \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos\theta}$

Halbparameter

ε = Exzentrizität $\varepsilon < 1$

$\varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

a, b = Halbachsen

- Spezialfall $\varepsilon = 0 \rightarrow$ Kreisbahn mit Radius p

$F_{ZP} = F_G$

$\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{\cancel{m}\cdot M}{r^{\cancel{2}}} \leftarrow$

mit $L = r\cdot m\cdot v \rightarrow v = \frac{L}{m\cdot r}$

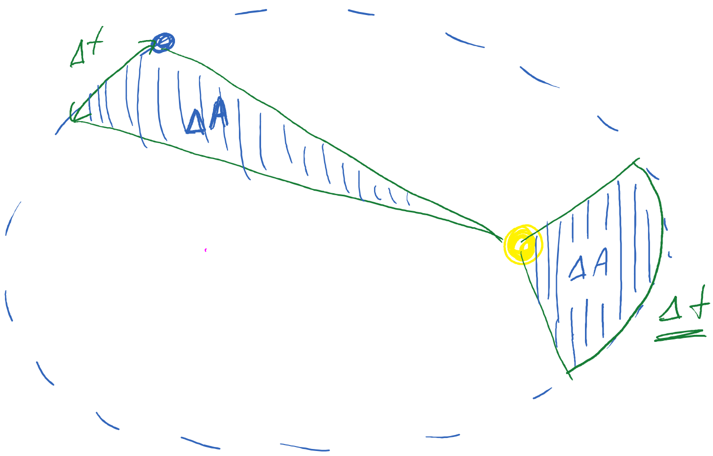
mit $L = r \cdot \underbrace{m \cdot v}_{p} \rightarrow \underline{v} = \frac{L}{m \cdot r}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{L^2}{m^2} = \frac{G \cdot M}{\cancel{r}}$$

Drehimpuls

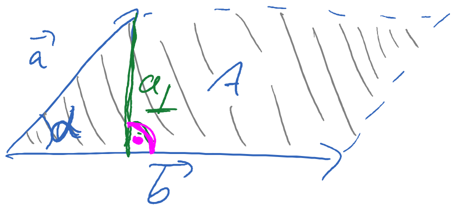
$$\boxed{r = \rho = \frac{L^2}{G M m^2}}$$

2. Fahrstrahl überstreicht in gleicher Zeit gleiche Flächen



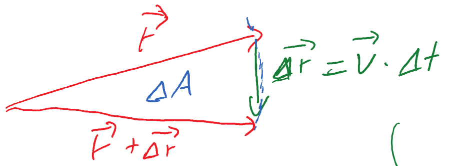
Grund: Drehimpulserhaltung

Fläche im Parallelogramm



$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = a_\perp \cdot b$$

Kreissegment:



$$\underline{\Delta A} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times (\vec{r} + \Delta\vec{r})\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \Delta\vec{r}\right| =$$

Segment ≈ Dreieck = ½ Parallelogramm

$$= \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| \cdot \Delta t = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right| \Delta t$$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$

$\Delta A \quad 1 \quad |\vec{L}|$

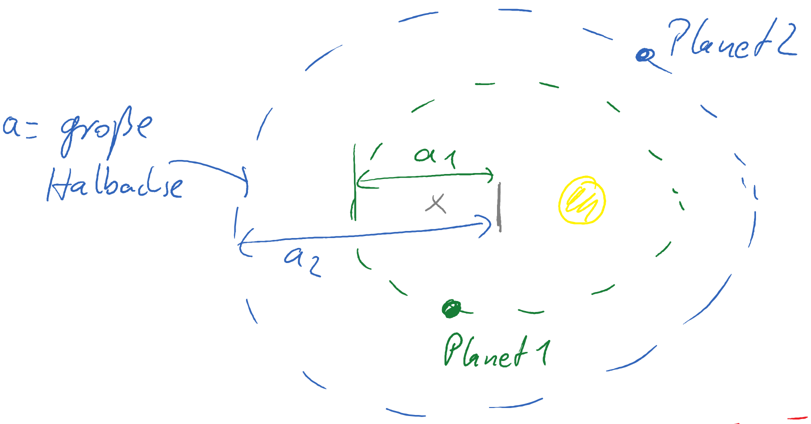
$L = r \times p = m \cdot r \times v$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2m} \left| \vec{L} \right| = const}$$

q.e.d.

Masse des Planeten

3. Zeit - Abstands - Relation



Umlaufzeit : T_i

Halbachse : a_i

Es gilt:
$$\boxed{\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = const$$

Herleitung für Kreisbahnen $(\varepsilon = 0 \rightarrow a = r)$

$$F_{ZP} = F_G$$

$$\cancel{m}\omega^2 a = G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{a^2}$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ← "1x rum"

T ← Umlaufzeit

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a = \frac{GM}{a^2}$$

$$\boxed{\frac{4\pi^2}{G \cdot M} = \frac{T^2}{a^3} = const}$$

Masse der Sonne

Gravitationskonstante