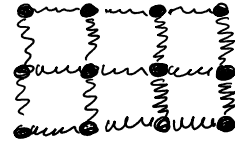


4. DEFORMIERBARE KÖRPER

4.1. AGGREGATS ZUSTÄNDE

Festkörper

- i.d.R. Gitterstruktur, **ordentliche Bindung** zwischen Atomen $\rightarrow$ (poly)kristallin



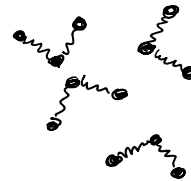
- aber auch **amorphe** Festkörper

z.B. Glas

- inkompressibel, formstabil, u.U. elastisch verformbar
- hohe Dichte typ. $\rho > 1 \text{ g/cm}^3$ ($\text{Au, Pb, W, U, ... } \rho > 10 \text{ g/cm}^3$)

Flüssigkeiten

- Atome/Moleküle aneinander gebunden, **Partner wechseln ständig**



- inkompressibel aber verformbar
- hohe Dichte

Wasser, Öl: $\rho \sim 1 \text{ g/cm}^3$

Quecksilber $\rho \approx 13 \text{ g/cm}^3$

Gase

- **keine Bindung** zwischen Gasatomen/-molekülen
Wechselwirkung über Stöße
- nehmen das zur Verfügung stehende Volumen ein
 $\hookrightarrow$ leicht verformbar und kompressibel
- geringe Dichte Luft $\rho \sim 10^{-3} \text{ g/cm}^3$

$\text{N}_2, \text{O}_2, \text{CO}_2, \text{Ar, ...}$, Methan, Wasserdampf

Plasma

Atome sind in Elektronen und Atomrümpfe (Kerne)
zerlegt
Sonne

Fast alle Elemente können in allen Phasen vorliegen,
 ↳ abhängig von Temperatur T und Druck p .

4.2. DEFORMATION FESTER KÖRPER

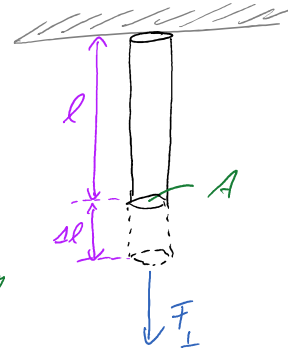
Versuch: Draht von der Decke

relative Längenänderung

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \propto \frac{F_{\perp}}{A} = \sigma \leftarrow \text{Normalspannung} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

↑
Querschnittsfläche

epsilon sigma



Für kleine Auslenkungen (elastischer Bereich):

4.2.1. HOOKE'SCHES GESETZ (ALLGEMEIN)

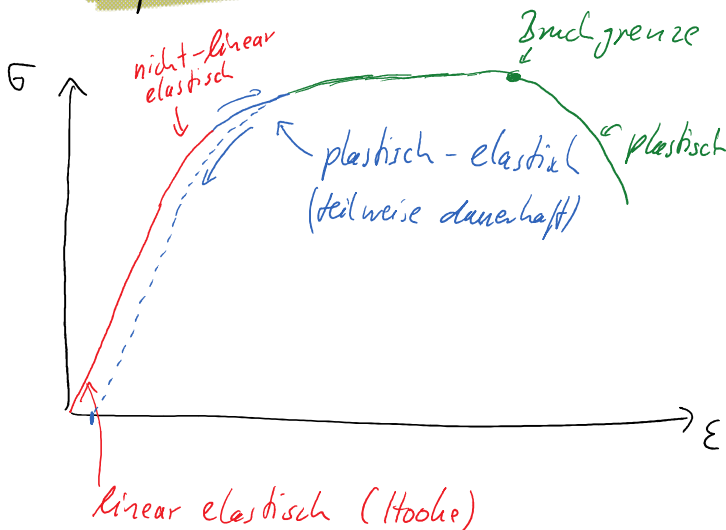
$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

↑ Normalspannung ↑ Elastizitätsmodul $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$ ↑ relative Längenänderung [1]
 (engl. Young's modulus)

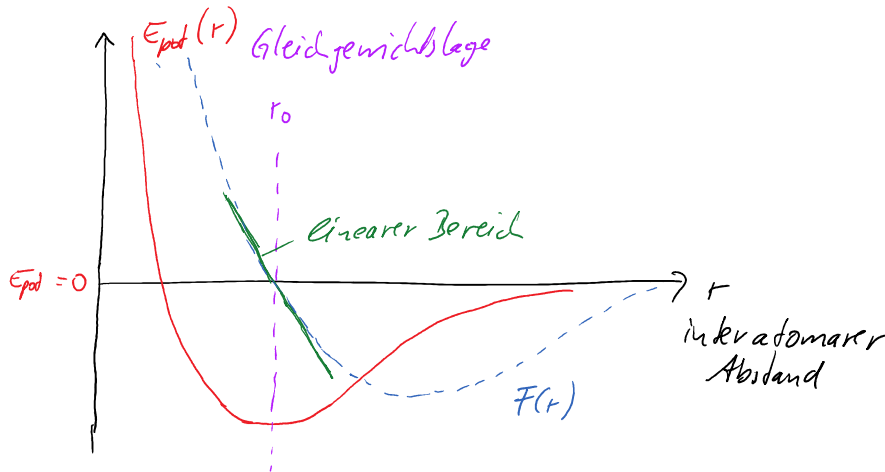
Material	$E \left[10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
Stahl	~ 200
Kupfer	~ 120
Blei	17
Eis	10
Gummibärchen	0.0001

Grenzen des Hooke'schen Gesetzes

Reißmaschine



mikroskopisch



Kräfte im Festkörper:

- 2 Atome : überlappende Elektronen hüllen
 - ↳ anziehende ($r > r_0$) und abstoßende ($r < r_0$) Kräfte
 - ↳ Ruhelage bei $F(r_0) = 0$
 - ↳ Taylorentwicklung $F(r) \propto (r_0 - r)$ für kleine $r_0 - r$
linear

• für große Auslenkung

↳ Neuordnung von Atomen
(v.a. Gitterdefekte)

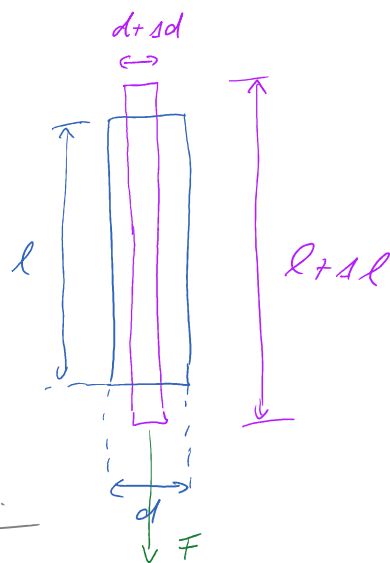
4.2.2. QUERKONTRAKTION

Versuch

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}$$

"mu" Poissonzahl ($\mu < 1$)

Material	Kork	Stahl	Alu	Gummi
Poissonzahl	0.0	0.3	0.44	0.5



Volumenänderung: einseitiger Zug

1, 1, 2



Volumenänderung: einseitiger Zug

$$V = l d^2$$



$$\Delta V = (l + \Delta l) (d + \Delta d)^2 - l d^2 =$$

$$= \cancel{l d^2} + 2 l d \Delta d + \cancel{l \Delta d^2} + \cancel{\Delta l d^2} + 2 \Delta l d \Delta d + \cancel{\Delta l \Delta d^2} - \cancel{l d^2}$$

$\ll 1$ $\ll 1$ $\ll 1$
 ignoriere sehr kleine Terme $\Delta l^2, \Delta d^2$

$$\approx 2 l d \Delta d + \Delta l d^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{l} (1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$$

rel. Volumen-
änderung

typ. $0 < \mu < 0.5$

Volumenänderung: allseitiger Druck

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu) = K \cdot \sigma$$

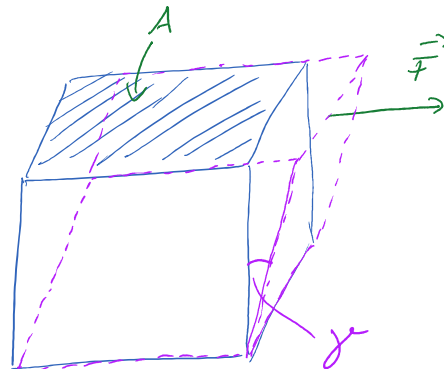
'Kappa' Kompressibilität $K = \frac{3 - 6\mu}{E}$

4.2.3. SCHERUNG

Kraft **tangential** zur
Oberfläche $\vec{F} \parallel A$

$$\vec{F}_{\parallel} = \tau \cdot A$$

$$\text{vgl. } F_{\perp} = \sigma \cdot A$$



Schub- oder
"tau" Scherspannung $\left[\frac{N}{m^2} \right]$

Scherwinkel

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1}{A \cdot G} \cdot F_{\parallel}$$

"gamma" ↑

$$G: \text{Schubmodul} \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

4.2.4. DRILLUNG / TORSION

4.2.4 DRILLUNG / TORSION

betrachte Hohlzylindersegment

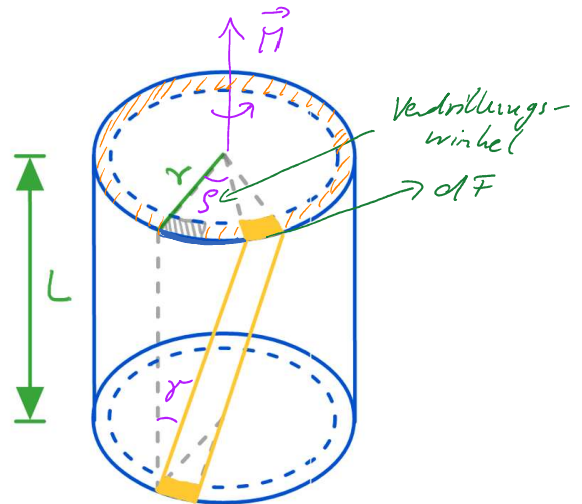
↳ geschernt um Winkel γ

↳ Verdrehung um Winkel φ

$$\varphi = \frac{L}{r} \cdot \gamma$$

mit $\gamma = \frac{\tau}{G}$

$$\hookrightarrow \tau = \frac{G \cdot r}{L} \cdot \varphi$$



Nötige Scherkraft (alle Segmente des Hohlzylinders $\int d\varphi = 2\pi$)

$$dF = \tau \cdot dA = \tau \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Drehmoment

$$dM(r) = r \cdot dF = \frac{2\pi G}{L} \cdot \varphi \cdot r^3 dr$$

Gesamter Zylinder = Summe über Hohlzylinder

$$M = \int_0^R \frac{2\pi G}{L} \varphi \cdot r^3 dr = \frac{2\pi G}{L} \cdot \varphi \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R$$

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \varphi = -J \cdot \varphi$$

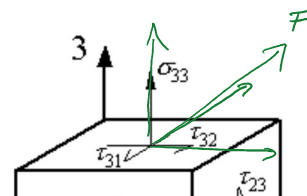
↑ ↑
Direktionsmoment "rho" Verdrehungswinkel

vgl. Gravitationswaage

4.3. ELASTIZITÄTSTENSOR

- Zug / Druck von 3 Seiten möglich

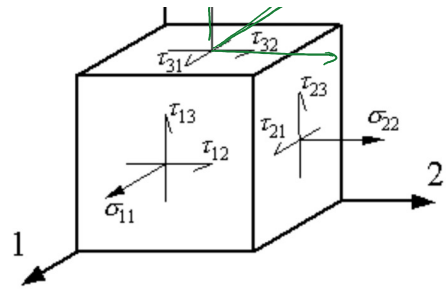
↳ Zerlegung in 3 Kräfte



↳ Zerlegung in 3 Kräfte

Spannungstensor

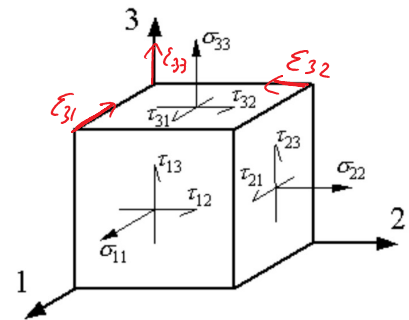
$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \leftarrow \text{eingezeichnete Kraft}$$



• Verformung in 3 Raumrichtungen

Verzerrungstensor

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$



allgemeine Form

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{C} \cdot \tilde{\sigma}$$

Spannungstensor 3×3

Verzerrungstensor
 3×3

Elastizitätstensor 9×9

Aber: wg. Symmetrie
ist Anzahl der Parameter
viel kleiner

(max. 21, min. 2)