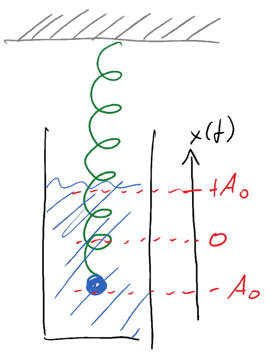
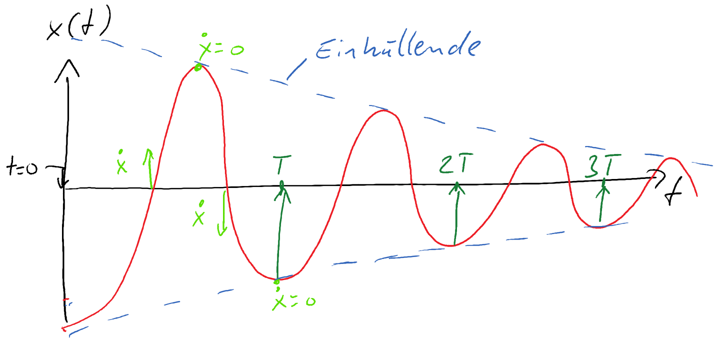
1.2 GEDÄMPFTE SCHWINGUNG





Versuch: Federpendel im Wasserbad

- Periodendauer $T = \text{const}$
- Amplitude (max. Auslenkung) → nimmt ab

↳ Dämpfung durch Stokes'sche Reibung

$F_R = 6\pi r \eta \cdot v = k \cdot \dot{x}$ $\quad \dot{x} = v$

Viskosität

Radius der Kugelmasse

Dämpfungskonstante hier $6\pi r \eta$

Bewegungsgleichung:

$$\boxed{m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0}$$

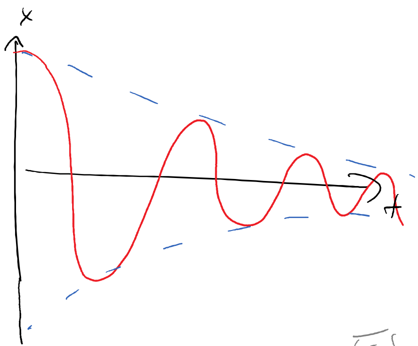
Lösungsansatz

↳ Amplitude nicht konstant $\quad A \mapsto A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} = 90°$

$x(t) = A(t) \cdot \cos \omega t$

γ: gamma $\quad = A_0 e^{-\gamma \cdot t} \cos \omega t$



$\dot{x}(t) = A_0 (-\gamma) e^{-\gamma t} \cos \omega t + A_0 e^{-\gamma t} (-\omega) \sin \omega t$

$= A_0 e^{-\gamma t} (-\gamma \cos \omega t - \omega \sin \omega t)$

$\ddot{x}(t) = A_0 \gamma^2 e^{-\gamma t} \cos \omega t + A_0 \gamma e^{-\gamma t} \omega \sin \omega t$

Einheiten?

$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t$

$e^{-\gamma t}$ hat Einheit 1

$$\ddot{x}(t) = A_0 \gamma^2 e^{-\gamma t} \cos \omega t + A_0 \gamma e^{-\gamma t} \omega \sin \omega t$$
$$+ A_0 \gamma e^{-\gamma t} \omega \sin \omega t - A_0 e^{-\gamma t} \omega^2 \cos \omega t$$
$$= A_0 e^{-\gamma t} \left[(\gamma^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\gamma \omega \sin \omega t \right]$$

$e^{-\gamma t}$ hat Einheit 1

$[\gamma t] = 1 \Rightarrow [\gamma] = \frac{1}{s}$

$[t] = s$

$\cos \omega t \quad [\omega] = \frac{1}{s}$

Einsetzen in die Bewegungsgl. (geteilt durch m)

$$A_0 e^{-\gamma t} \Big[(\gamma^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\gamma \omega \sin \omega t \qquad \ddot{x}(t)$$
$$-2\gamma^2 = \left(-\frac{k}{m} \gamma \right) \cos \omega t - \frac{k}{m} \omega \sin \omega t \qquad \dot{x}(t)$$
$$\omega_0^2 = \left(+ \frac{D}{m} \right) \cos \omega t \Big] \stackrel{!}{=} 0 \qquad x(t)$$

$\Rightarrow$ "cos" Terme

$$\gamma^2 - \omega^2 - 2\gamma^2 + \omega_0^2 = 0$$
$$= \omega_0^2 - \gamma^2 - \omega^2 = 0$$

"sin" Terme

$$2\gamma - \frac{k}{m} = 0$$
$$\gamma = \frac{k}{2m}$$

Schwingungskreisfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ mit

Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ und

Dämpfung $\gamma = \frac{k}{2m}$

zudem: Gütefaktor $Q = \frac{\sqrt{mk}}{D} \rightarrow$ Abschwächung in Anzahl Schwingungen

Video: Pohl'sches Rad mit Dämpfung

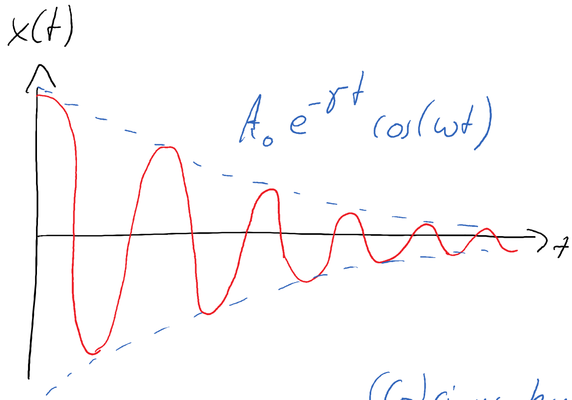
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Drei Fälle:

① Schwingfall

$\gamma < \omega_0 \Rightarrow \omega$ reell

↳ gedämpfte Schwingung mit $\omega < \omega_0$



(Co)sinus hyperbolicus

$\Downarrow$

$A e^{-\gamma t} \cosh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t\right)$

② ...

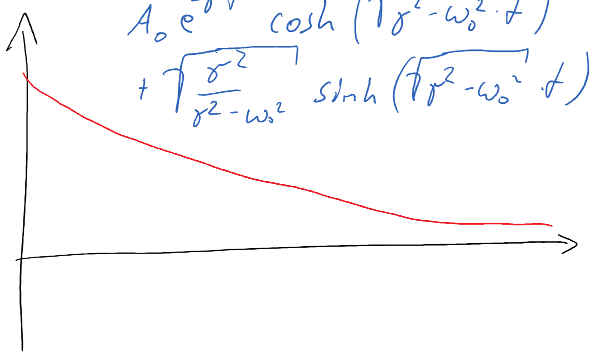
② Kriechfall

$\gamma > \omega_0 \Rightarrow \omega$ imaginär

↳ keine Schwingung,
reine Dämpfung

$\Downarrow$

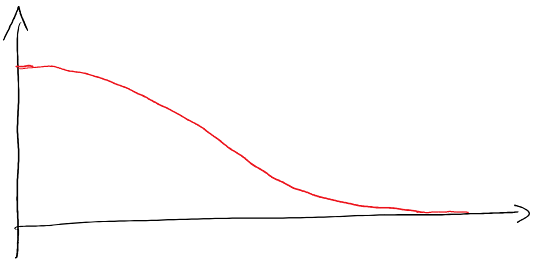
$A_0 e^{-\gamma t} \cosh\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t\right) + \sqrt{\frac{\gamma^2}{\gamma^2-\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t\right)$



③ aperiodische Grenzfall

$\omega_0 = \gamma$

↳ $\frac{1}{4}$ "Schwingung" zurück in die Ruhelage,
kein Überschwinger
(für $\dot{x}(0) = v(0) = 0$)



1.3. ERZWUNGENE SCHWINGUNG

Periodische Einwirkung einer äußeren Kraft auf den Oszillator

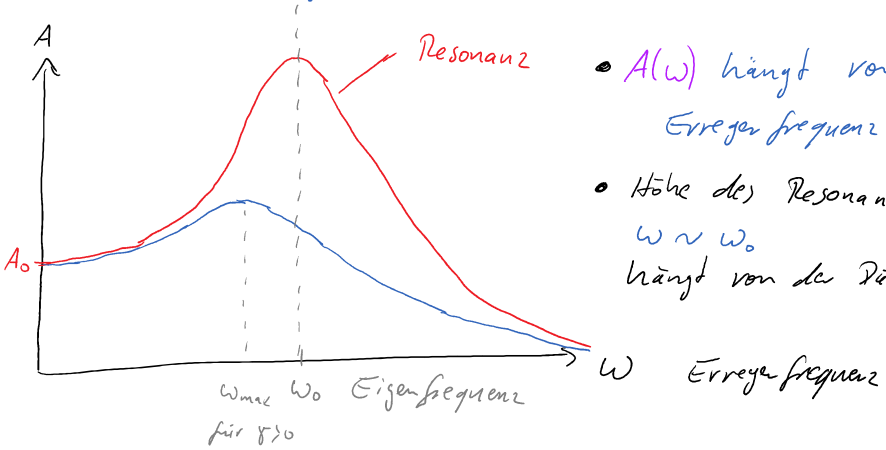
→ Film

äußere Kraft : $F_{ext} = F_0 \cos \omega t$

ω: Erregerfrequenz

ω_0: Eigenfrequenz

↳ System schwingt mit $\underline{\omega}$!



- $A(\omega)$ hängt von der Erregerfrequenz ω ab
- Höhe des Resonanzmaximums $\omega \sim \omega_0$ hängt von der Dämpfung ab