

2.4.2. GAUSS'SCHER SATZ (INTEGRALFORM)

$$\epsilon_0 \oint_{\text{Kugel}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \phi = q_{\text{eingeschlossene Ladung}} = \int_V \rho \cdot dV$$

A = Rand von V
 $\hat{=}$ geschlossene Oberfläche
 V = Volumen

Beispiele

- Volumen V_1 / Oberfläche A_1

$$\epsilon_0 \oint_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = +q$$

$(\vec{n} \cdot \vec{E} > 0 \text{ überall})$

- Vol. V_2 / Oberfl. A_2

$$\epsilon_0 \oint_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = -q$$

$(\vec{n} \cdot \vec{E} < 0 \text{ überall})$

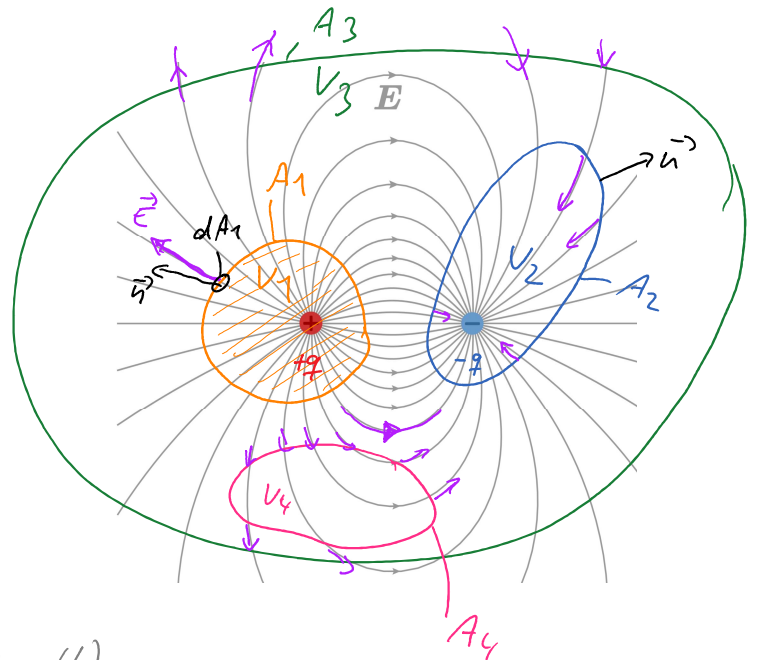
$$\vec{n} \cdot \vec{E} = |\vec{n}| \cdot |\vec{E}| \cdot \cos \varphi = |\vec{n}| |\vec{E}| \cos \varphi$$

- $\nearrow \varphi < 90^\circ \Rightarrow \cos > 0$
- $\nwarrow \varphi > 90^\circ \Rightarrow \cos < 0$

- V_3, A_3

$$\epsilon \oint_{A_3} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (= +q + (-q) = 0)$$

Alle Feldlinien, die V_3 verlassen, kehren auch wieder in V_3 zurück



↳ Dipol ist nach außen elektrisch neutral

• V_G, A_G

$$\epsilon_0 \oint_{A_G} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 = \epsilon_0 \phi$$

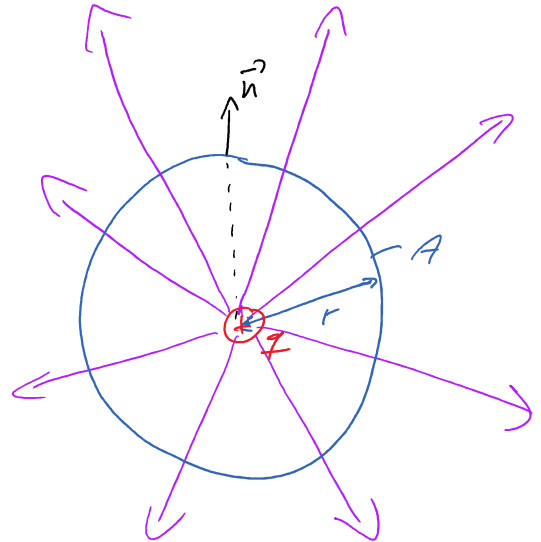
Kugel um eine Punktladung

Überall • $\vec{E} \parallel \vec{n} \perp A$

$$\bullet \vec{E} = \vec{E}(r) = \text{const}$$

$$\begin{aligned} q &= \epsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \\ &= \epsilon_0 E(r) \underbrace{\oint dA}_{\text{Kugeloberfläche}} = \\ &= \epsilon_0 E(r) \cdot 4\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad \checkmark (\text{wichtig})$$



Elektrische Fluss hängt **nicht** ab von der genauen Geometrie
(Anordnung der Ladungen, Form der Oberfläche)

2.5. ELEKTRISCHES POTENTIAL UND SPANNUNG

2.5.1. Arbeit im Coulombfeld

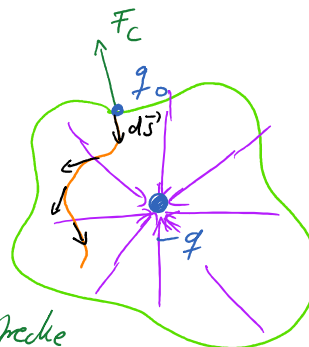
Testladung q_0 wird vom Feld bewegt

↳ Arbeit
(vom Feld geleistet)

$$W = \int \vec{F}_C \cdot d\vec{s}$$

$\uparrow$ Element der Wegstrecke
 $\uparrow$ Coulombkraft

$$= q_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



$$\vec{E} \perp d\vec{s} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$= q_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\begin{aligned} d\vec{s} &\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \perp \\ \parallel \end{array}$$

Spezialfall: geschlossener Weg

$$W = \int \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = 0$$

↳ Coulombkraft ist
(wie Gravitationskraft)
eine konservative Kraft

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

geschlossener Weg
(Linie)

"in der
Oberfläche"
= parallel zum
Weg



Arbeit = 0!

im Gegensatz zu !

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

↑
senkrecht zur Oberfläche

2.5.2 POTENTIELLE ENERGIE

kleine Testladung q_0 im $\vec{E}$ -Feld von Q

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

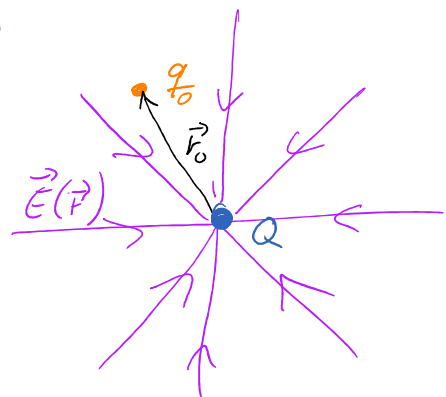
Potentielle Energie = Arbeit um q_0
nach r_0 zu bringen

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}_0) - E_{\text{pot}}(\infty) = W$$

von uns geleistete Arbeit

= 0 per Konvention

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}_0) = - \int_{\infty}^{r_0} \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 Q \int_{\infty}^{r_0} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2} dr$$

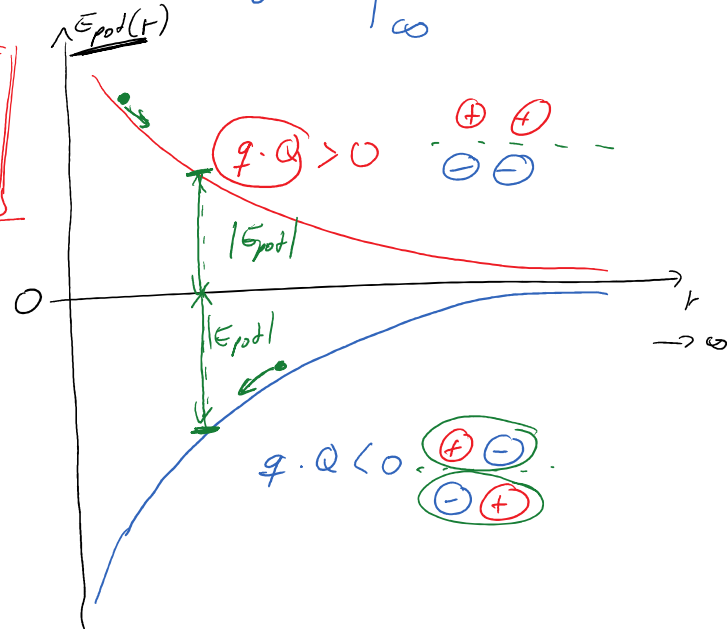


$$\epsilon_{\text{pot}}(r_0) = - \int_{\infty}^{r_0} F_c(r) dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q Q \int_{\infty}^{r_0} \frac{1}{r^2} dr$$

↑
arbeiten
gegen die
Coulombkraft

$$= - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_0} \frac{1}{r^2} dr = + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{1}{r} \right|_{\infty}^{r_0}$$

$$\epsilon_{\text{pot}}(r_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r_0}$$



2.5.3. POTENTIAL UND SPANNUNG

Def. Größen **unabhängig** von Punktladung (q)

$$\vec{F} \mapsto \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\epsilon_{\text{pot}} \mapsto \varphi = \frac{\epsilon_{\text{pot}}}{q}$$

↑
phi Potential

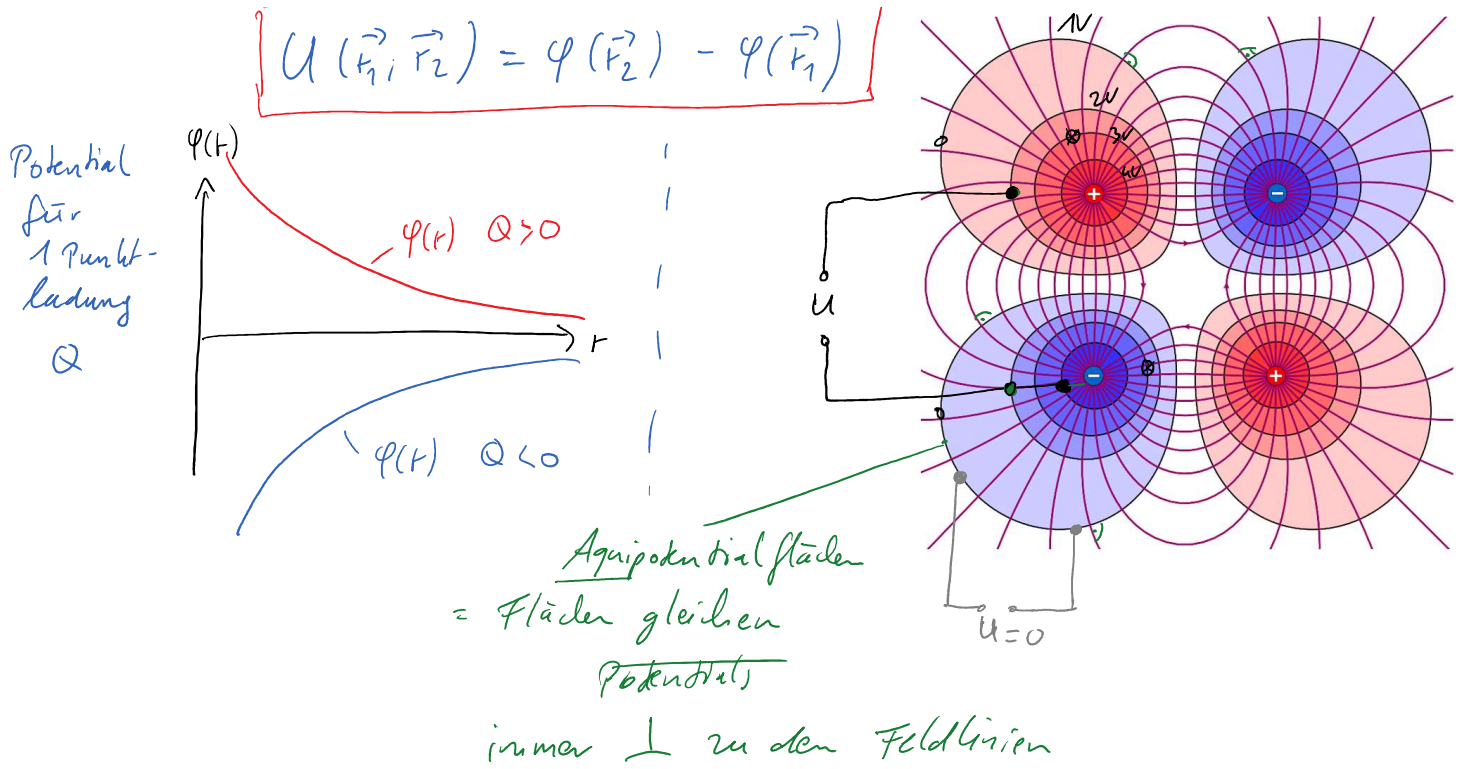
Für Punktladung: $\varphi(r) = \frac{1}{q} \epsilon_{\text{pot}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$

elektrisches
Potential
einer Punktladung

Spannung ist die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$$





Einheiten:

• Spannung $[U] = [\varphi] = \frac{Nm}{C} = \frac{J}{C} = \frac{Ws}{As} = \frac{VA}{As} = V$ Volt

• elektr. Energie $[W_{el}] = \underbrace{C \cdot V}_{\leftarrow q \cdot U} = J = W_s$

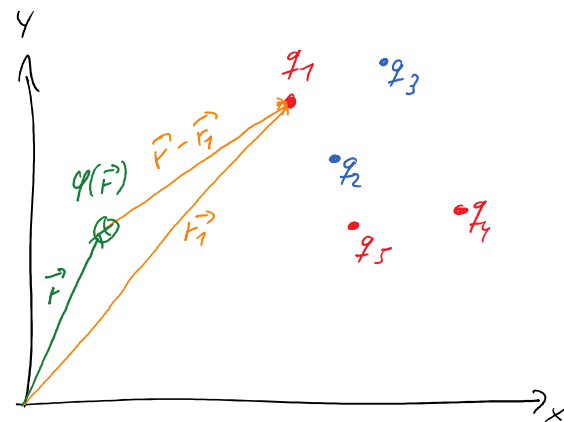
• elektr. Leistung $[P_{el}] = W = \frac{J}{s} = \frac{C}{s} \cdot V = AV$

Bsp. für Potentiale

1) Punktladungen

↳ Superpositionsprinzip

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



2) elektr. Dipol

↳ analog zu den Überlegungen zum $\vec{E}$ -Feld

$\varphi(r) = 0$

• Dipolmoment $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$

• Dipolmoment $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$

$$\hookrightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot l \cdot \cos\alpha}{r^2}$$

Fernfeld

