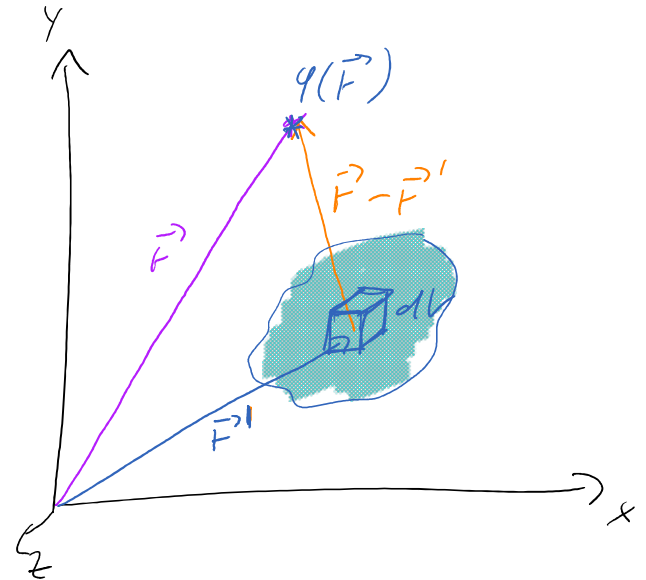


3) kontinuierliche Ladungsverteilung
Volumenladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV} \quad [\rho] = \frac{C}{m^3}$$

Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$



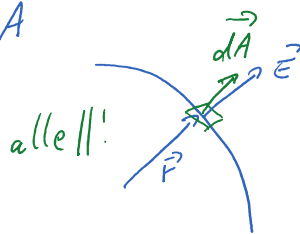
4) Homogen geladene Kugel (z.B. Atomkern)

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Gesamtladung
 $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$

• radialsymmetrisch (wie Kugel!)

$$\vec{E} \parallel \vec{r} \parallel d\vec{A}$$

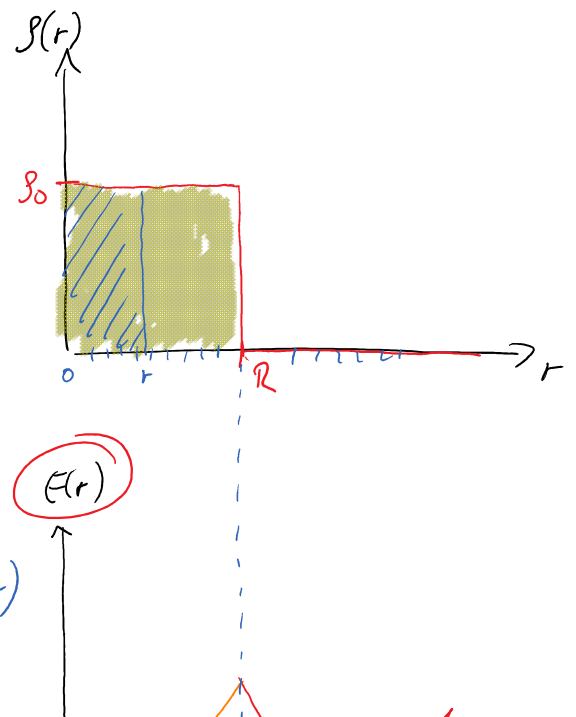


• außerhalb der Kugel ($r > R$)

$\hookrightarrow$ Gauß'scher Satz

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r)$$

$E(r) = \text{const. auf Kugeloberfl.}$



$$\epsilon_0 \quad \vec{E}(r) = \text{const auf Kugeloberfl.} \\ \Rightarrow E(r) \cdot dA = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Kugeloberfl.}} \cdot E(r)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \quad \leftarrow \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$dW = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$d\varphi = \frac{dW}{q}$$

- innerhalb der Kugel ($r < R$)

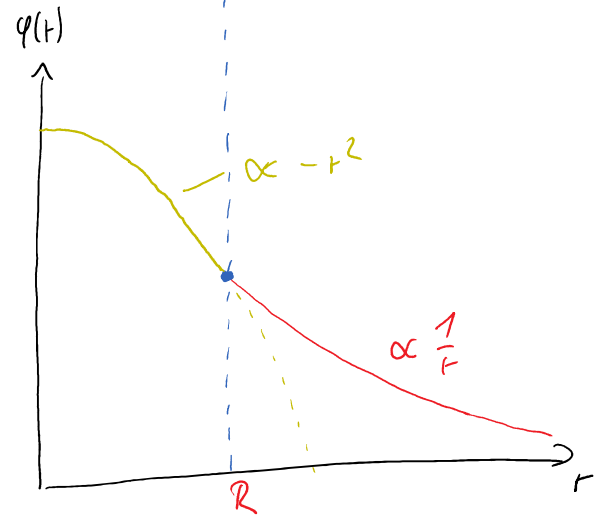
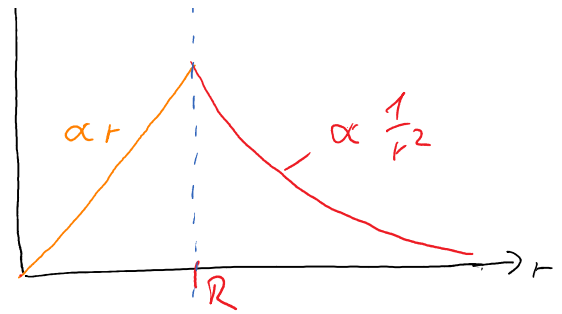
$$\int_0^r \rho_0 dV = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 = \epsilon_0 \phi = \epsilon_0 4\pi r^2 E(r)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r} \leftarrow \text{linear!}$$

$$\varphi(r) = \varphi(\underline{R}) - \int_{\underline{R}}^r E(r) dr =$$

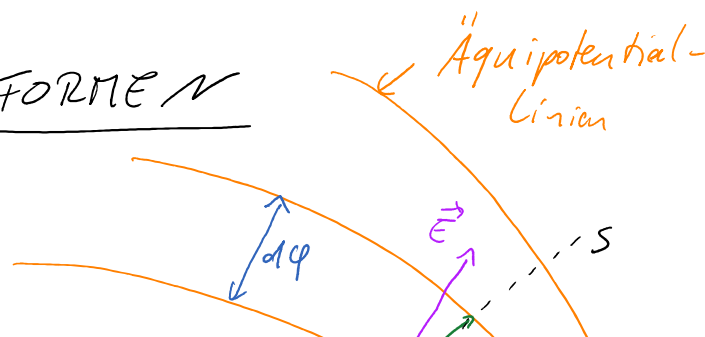
$$= \varphi(R) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \int_R^r r dr =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{R} - \frac{Q}{R^3} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} R^2 \right) \right] \quad \propto -r^2$$



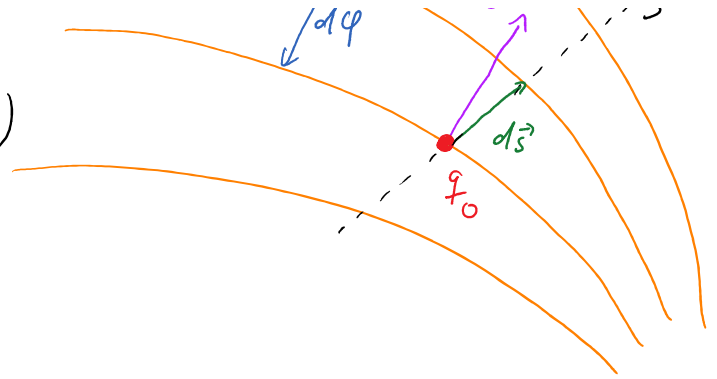
2.5.4 DIFFERENTIELLE FORMEN

Bewege Testladung q_0 entlang s
um $d\vec{s}$



um $d\vec{s}$

↳ geleistete Arbeit (vom System)



$$dW = -\varphi_0 d\varphi =$$

$$= \underbrace{(\varphi_0 \cdot \vec{E})}_{\vec{F}} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow E_s = -\frac{d\varphi}{ds}$$

in jeder Raumrichtung

$$\text{also: } E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

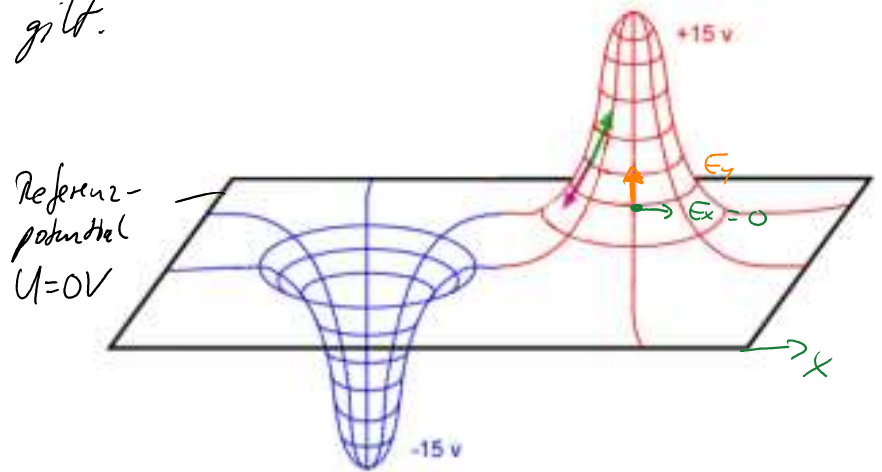
$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi} \quad \text{oder} \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

Das Superpositionsprinzip gilt!



Gauß'scher Satz

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

$\uparrow$ $\sim \text{const}$ $\uparrow$ $\sim \text{const}$

$$\frac{1}{dx dy dz} \left(dE_x \cdot \cancel{dy} \cdot \cancel{dz} + dE_y \cdot \cancel{dx} \cdot dz + dE_z \cdot dx \cdot \cancel{dy} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\rho_{\text{en}}}{dV} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$+ dE_y \cdot \cancel{dx} \cdot dz$$

$$+ dE_z \cdot dx \cdot \cancel{dy})$$

Änderung d. x-Komponente der el. Feldes in x-Richtung

$$\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\uparrow$
Quellstärke

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Ladungen sind die Quellen (Senken) des elektrischen Feldes

z.B. Homogenes $\vec{E}$ -Feld

- mit Integralsatz $\Rightarrow$ Zylinder

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \vec{E} \cdot \vec{A}_M + \vec{E} \cdot \vec{A}_+ + \vec{E} \cdot \vec{A}_-$$

$$\cos 90^\circ = 0 \quad \cos 0^\circ = 1 \quad \cos 180^\circ = -1$$

$$= E \cdot A_+ - E \cdot A_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_{\text{Ein}}}{V} = \rho = 0$$

- mit Gradient

$$\vec{\nabla} E \rightarrow = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0$$

$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} E_x}_{\text{const}} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} E_y = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0$

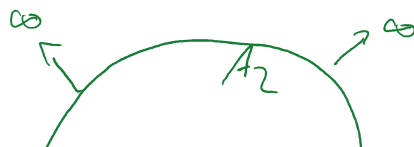
$$\Rightarrow \rho = 0$$

Im homogenen elektrischen Feld ist die Ladungsdichte null.

2.6. KAPAZITÄT

$\hat{=}$ Fassungsvermögen zur Ladungsspeicherung

z.B. Kondensator



2.3. Kondensator

Plattenkondensator

• Gaußsche Satz

$$\frac{+q}{\epsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} =$$

$$= \cancel{\phi_1} + \cancel{\phi_2} + \cancel{\phi_3} + \phi_4$$

$\approx 0 \quad \approx 0 \quad \approx 0$

$$= \vec{E} \cdot \vec{A}_4 = E \cdot A$$

$$\begin{aligned} & \uparrow \\ & (\vec{E} \perp \vec{A}_4) \\ & \vec{E} \parallel \vec{n}_4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{E}| = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot A}}$$

unabhängig vom Abstand der Platten!

- Potentialdifferenz zwischen den Platten

$$\underline{\varphi(d)} - \underline{\varphi(0)} = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{x} = -E \int_0^d dx = -E \cdot d$$

↳ Spannung

$$\boxed{U = \varphi_+ - \varphi_- = E \cdot d = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{d}{A}}$$

