

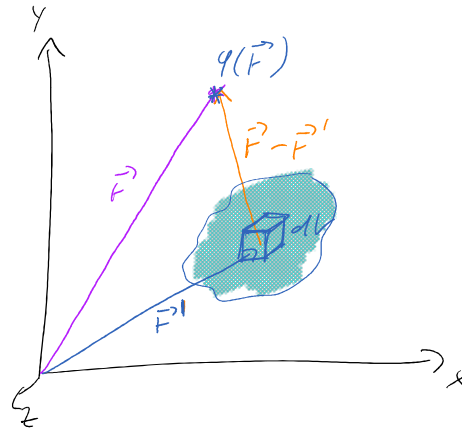
3) kontinuierliche Ladungsverteilung

Volumenladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV} \quad [\rho] = \frac{C}{m^3}$$

Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

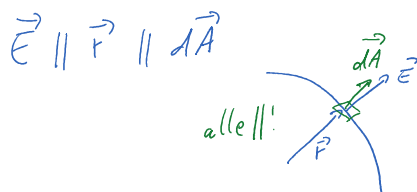


4) Homogen geladene Kugel (z.B. Atomkern)

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Gesamtladung
 $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$

• radialsymmetrisch (wie Kugel!)



• außerhalb der Kugel ($r > R$)

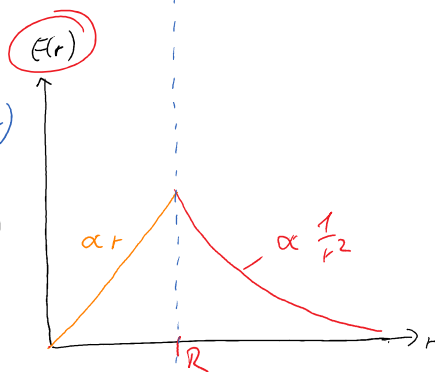
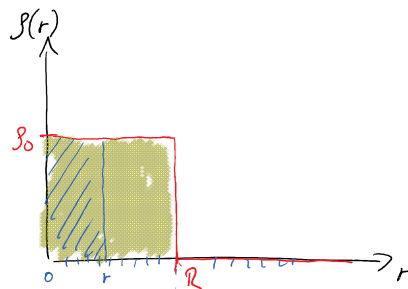
$\hookrightarrow$ Gauß'scher Satz

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r)$$

$E(r) = \text{const auf Kugeloberfl.}$
 $\Rightarrow E(r) \oint dA = 4\pi r^2 \cdot E(r)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$



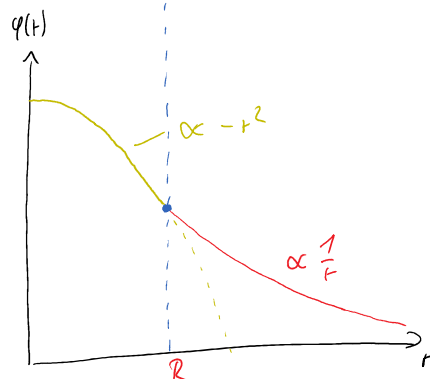
$$dW = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$d\varphi = \frac{dW}{q}$$

• innerhalb der Kugel ($r < R$)

$$\int_0^r \rho_0 dV = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 4\pi r^2 E(r)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{3} = \frac{1}{3} \frac{Q}{\epsilon_0 R^3} \vec{r} \propto \text{linear!}$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3 \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \vec{r}}{R^3} \leftarrow \text{linear!}$$



$$\varphi(r) = \varphi(\underline{R}) - \int_{\underline{R}}^r E(r) dr =$$

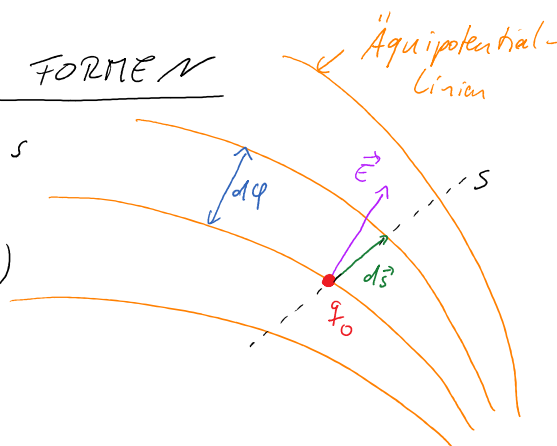
$$= \varphi(R) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \int_R^r r dr =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{R} - \frac{Q}{R^3} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} R^2 \right) \right] \propto -r^2$$

2.5.4 DIFFERENTIELLE FORMEN

Bewege Testladung q_0 entlang s
um $d\vec{s}$

$\hookrightarrow$ geleistete Arbeit (vom System)



$$dW = -q_0 d\varphi =$$

$$= \underbrace{(q_0 \cdot \vec{E})}_{\vec{F}} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow E_s = -\frac{d\varphi}{ds} \quad \text{in jeder Raumrichtung}$$

$$\text{also: } E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

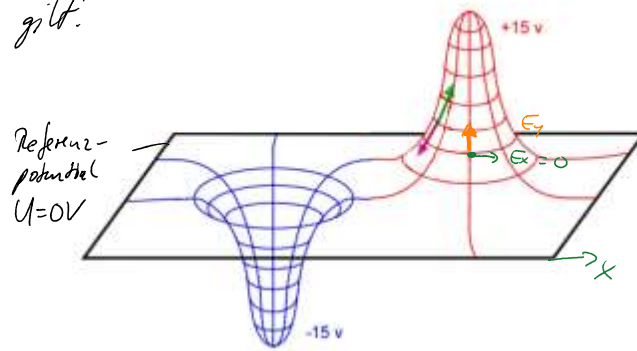
$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi} \quad \text{oder} \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

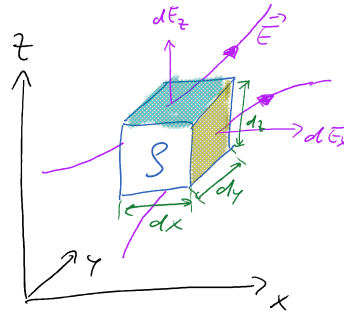
Das Superpositionsprinzip gilt!



Gauß'scher Satz

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

$\sim \text{const}$ $\sim \text{const}$



$$\frac{1}{dx dy dz} (dE_x \cdot dx dy dz + dE_y \cdot dx dy dz + dE_z \cdot dx dy dz) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\varphi_{\text{el}}}{dV} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$+ dE_z \cdot dx dy dz$$

Änderung d. x-Komponente des el. Feldes in x-Richtung

$$\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

↑
Quellstärke

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Ladungen sind die Quellen (Senken) des elektrischen Feldes

z.B. Homogenes E-Feld

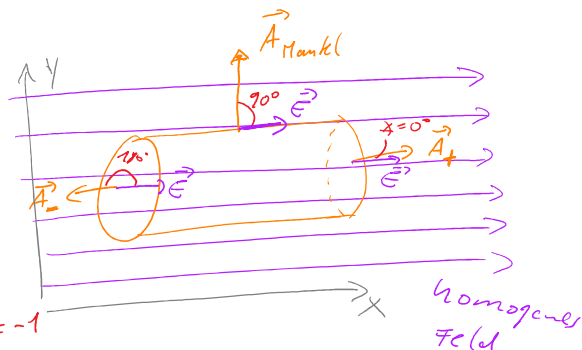
• mit Integralsatz $\Rightarrow$ Zylinder

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \vec{E} \cdot \vec{A}_M + \vec{E} \cdot \vec{A}_+ + \vec{E} \cdot \vec{A}_-$$

$$\cos 90^\circ = 0 \quad \cos 0^\circ = 1 \quad \cos 180^\circ = -1$$

$$= E \cdot A_+ - E \cdot A_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_{\text{ein}}}{V} = \rho = 0$$



$$= E \cdot A_+ - E \cdot A_- = 0 \Rightarrow \frac{q_{\text{ein}}}{V} = \rho = 0$$

- mit Gradient

$$\vec{\nabla} E \rightarrow = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0$$

$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} E_x}_{\text{const}} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} E_y = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0$

$$\Rightarrow \rho = 0$$

Im homogenen elektrischen Feld ist die Ladungsdichte null.

2.6. KAPAZITÄT

$\hat{=}$ Fassungsvermögen zur Ladungsspeicherung

z.B. Kondensator

Plattenkondensator

- Gaußsche Satz

$$\frac{+q}{\epsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} =$$

$$= \cancel{\phi_1} + \cancel{\phi_2} + \cancel{\phi_3} + \phi_4$$

$\approx 0 \quad \approx 0 \quad \approx 0$

$$= \vec{E} \cdot \vec{A}_4 = E \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \perp \vec{A}_4 \\ \vec{E} \parallel \vec{n}_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot A}$$

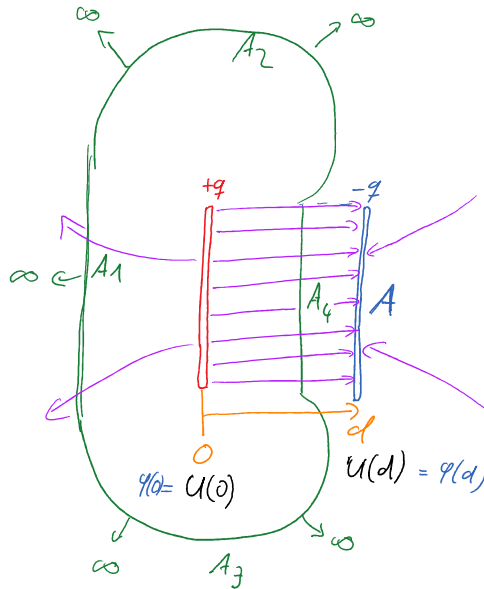
unabhängig vom Abstand der Platten!

- Potentialdifferenz zwischen den Platten

$$\underline{\varphi(d)} - \underline{\varphi(0)} = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{x} = -E \int_0^d dx = -E \cdot d$$

$\hookrightarrow$ Spannung

$$\underline{U} = \varphi_+ - \varphi_- = E \cdot d = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{d}{A}$$



Kapazität = Ladungsmenge pro Potentialdifferenz / Spannung

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\Delta \varphi} \quad (\text{Merksatz } CU = Q)$$
$$[C] = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} = F \quad (\text{Farad})$$

(typ. $\mu F \rightarrow pF$)

Wert der Kapazität hängt
von der Geometrie + Materialien ab

a) Luftgefüllter Plattenkondensator

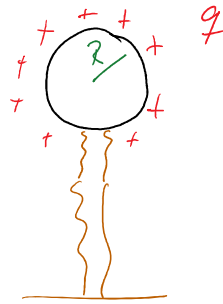
$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

b) Metallkugel

für $r > R$

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Potential differenz gegen ∞



$$\hookrightarrow C = \frac{q}{\varphi(R) - \varphi(\infty)} = 4\pi\epsilon_0 R$$

$= 0$

z.B. Kugel mit 1m Radius

$$C = 4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \cdot 1m = 110 \cdot 10^{-12} \frac{As^2}{VA} = 110 pF$$

moderne Kondensatoren haben große Fläche
& Dielektrikum ($\rightarrow$ 2.9)