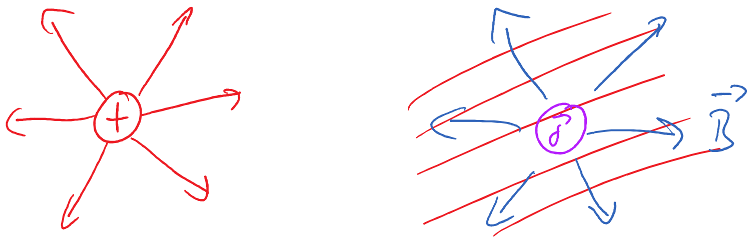
4.6. Vektorpotential (Fortsetzung)

$$\boxed{\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

damit automatisch: $\text{div}\,\vec{B} = 0$ ✓ gut

Quellfreiheit!

N.B.: elektr. Feld (statisch): $\text{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi_{el.}) = 0$



existiert nicht

Eichfreiheit:

beliebiges Skalarfeld f $\Rightarrow$ $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\, f$

$\Rightarrow$ $\vec{B}' = \text{rot}\,\vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}} + \underbrace{\cancel{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)}}_{=0} = \vec{B}$

Vektorpotential eichinvariant gegenüber Addition Gradientenfeld

Coulombeichung: wähle $\vec{A}$ so, daß

$$\boxed{\text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$$

4.6.1. POISSON-GLEICHUNG

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

elektrisches Feld: Laplace Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

elektrisches Feld:

Laplace Operator

$$\text{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\underbrace{(-\vec{\nabla}\phi)}_{\vec{E}} = -\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Die Quellen des elektr. Feldes sind die Ladungen

magnetisches Feld:

Grassmann-Identität

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \underbrace{\vec{\nabla}\times}_{\text{rot}}\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{\vec{B}} = \vec{\nabla}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{=0} - \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})}_{\Delta}\vec{A} = -\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$

wg. Coulomb-eichung

↳ Poisson-Gleichung

Vorz.!

$$\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}}$$

3 Gleichungen, komponentenweise,

z.B. $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 j_x$

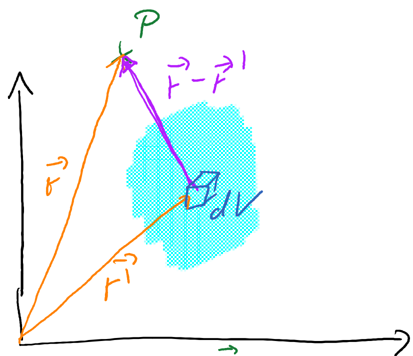
$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

nur 1 Komponente

Lösung der Poissongleichung

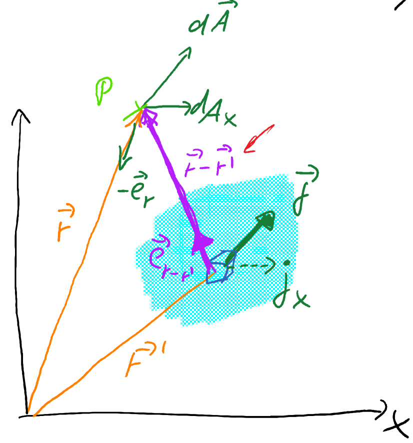
elektrisches Potential

$$\varphi(P) = \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'$$



magnetisches Potential

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{j_x(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'$$



für jede Komponente x, y, z

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r'$$

Es ist stets $\vec{A} \perp \vec{B}$ wegen

$$\underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{\vec{B}} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{A} \times \vec{A})}_{0} = 0$$

Spatproduktregel

Satz von Biot-Savart

Ableitung nach Komponenten von $\vec{r}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla}_r \times \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r'$$

Produktregel

$$\vec{\nabla}_r \times \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \overbrace{\vec{\nabla}_r \times \vec{j}(\vec{r}\,')}^{0} + \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \times \vec{j}(\vec{r}\,') =$$

unabhängig von $\vec{r}$ (nur von $\vec{r}\,'$)

Gradient $\frac{1}{r} \to \frac{1}{r^2}$

Richtung: $-\vec{e}_{(r-r')}$

$$= -\frac{\vec{e}_r}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} \times \vec{j}(\vec{r}\,') = \underline{\vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{e}_{(r-r')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}}$$

Satz von Biot-Savart:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{e}_{(r-r')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} d^3r'}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} d^3r'$$

→ Demtröder