

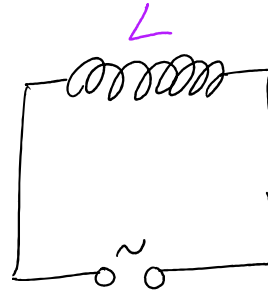
5.4. WECHSELSTROMKREISE

5.4.1. INDUKTIVER / KAPAZITIVER WIDERSTAND

Schaltung mit Spule

$$U_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \stackrel{!}{=} -U_0 \sin \omega t$$

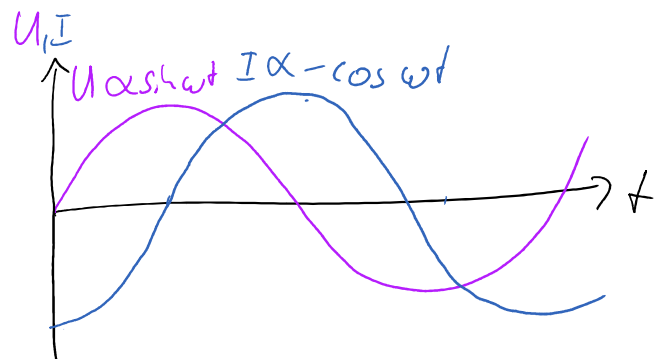
$$\hookrightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{U_0}{L} \sin \omega t$$



$$U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \underline{I(t)} &= -\frac{U_0}{\omega L} \cos \omega t \\ &= \frac{U_0}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$



- Strom ist gegen Spannung um $-\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben

- maximale Amplitude $I_0 = \frac{1}{\omega L} \cdot U_0 \rightarrow \frac{1}{Z_L}$

$\hookrightarrow$ induktiver Widerstand

$$Z_L = \omega L$$

↓
"Spule"

- mittlere Leistung ist null!

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{U(t)} \cdot \underline{I(t)} dt = -\frac{U_0^2}{Z_L} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cdot \cos \omega t dt = 0$$

$\hookrightarrow$ Strom ist Blindstrom

induktiver Widerstand ist Blindwiderstand

} "wattlos"

~ ~ ~ ~ ~

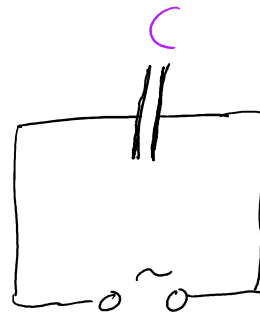
C

Schaltung mit Kapazität

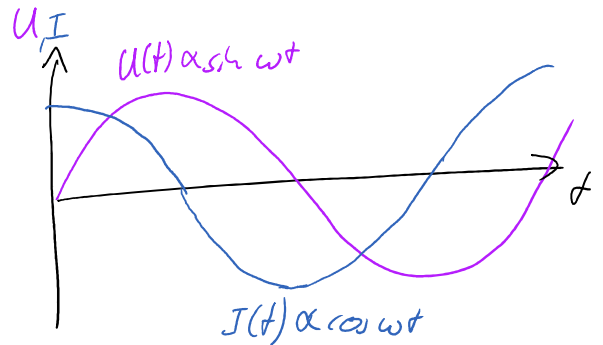
$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{1}{C} I(t)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow I(t) &= +\omega C U_0 \cos \omega t = \\ &= \omega C U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

- Phasenverschiebung $+\frac{\pi}{2}$
- Kapazitiver Widerstand $R_C = \frac{1}{\omega C}$
 $\downarrow$
 "Kondensator"
- mittlere Leistung ist null!

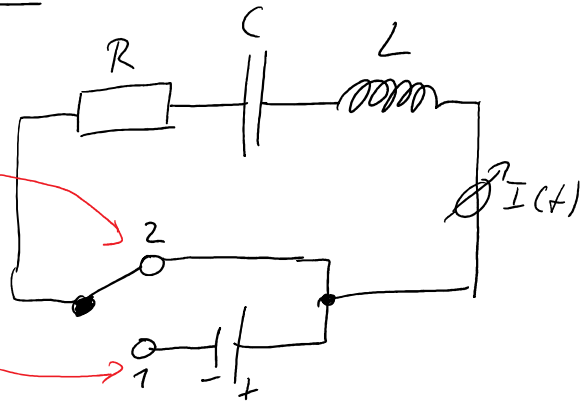


$$U(t) = U_0 \sin \omega t$$



5.4.2. FREIER SCHWINGKREIS

Aufladen ①
 umschalten auf ②
 $\hookrightarrow$ keine Spannungsquelle



Maschenregel

$$I \cdot R + \frac{Q}{C} + L \cdot \dot{I} = 0$$

mit $I = \dot{Q}$

$$\hookrightarrow L \cdot \ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

DGL des harmonischen Oszillators!

$\hookrightarrow$ Lösung analog

Erinnerung $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

Schwingkreis

Ladung Q

Strom $I = \dot{Q}$

Induktivität L

Kapazität $\frac{1}{C}$

ohmscher Widerst. R

Oszillator

Auslenkung x

Geschwindigkeit $v = \dot{x}$

Masse m

Federkonst. D

Dämpfung k

Idealer ungedämpfter Schwingkreis ($R=0$)

$$I(t) = \dot{Q}(t) = I_0 \sin(\omega t) \Rightarrow U \propto Q \propto \cos(\omega t)$$

mit Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

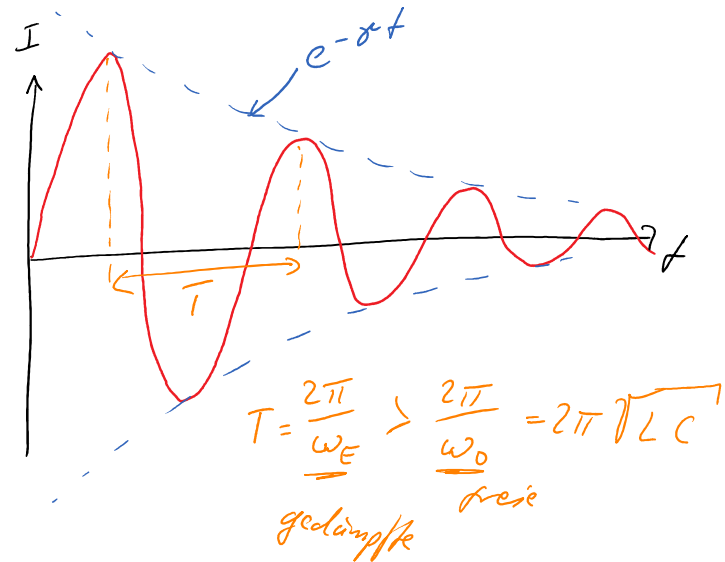
Realer Schwingkreis ($R > 0$)

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t)$$

Dämpfungsterm Eigenfrequenz ω_E

mit Dämpfung $\gamma = \frac{R}{2L}$

tinyurl.com/Ex2V414



5.4.3. KOMPLEXE WIDERSTÄNDE

komplexe Zahlen

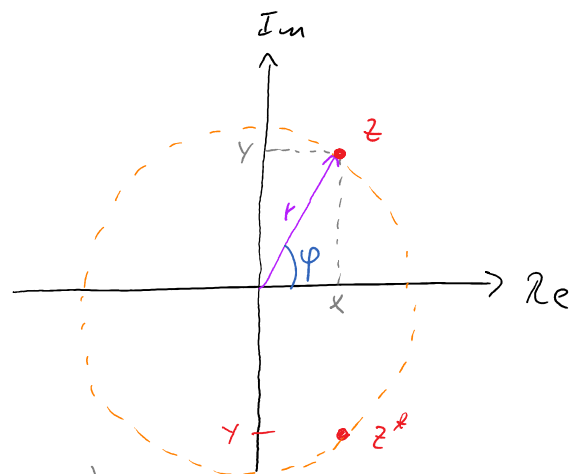
$$z = \frac{x}{Re} + i \frac{y}{Im} \quad (\text{kartesisch})$$

$$= r \cdot \cos \varphi + i r \cdot \sin \varphi \quad (\text{polar})$$

$$= r \cdot e^{i\varphi} \quad (\text{komplexe e-Funktion})$$

$$\equiv \cos \varphi + i \sin \varphi$$

mit



mit

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z z^*}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

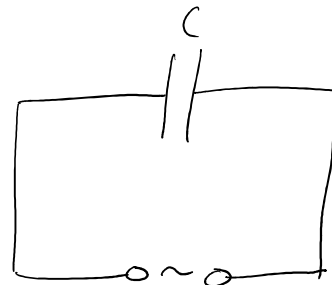
$$z^* = x - iy$$

$$\begin{aligned} (x + iy)(x - iy) &= \\ = x^2 - \underbrace{(i^2 y^2)}_{-1} &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Schwingungen:

$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$

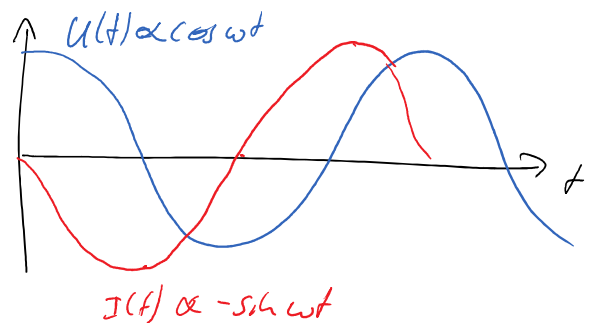
$$\hookrightarrow U(t) = \operatorname{Re}(U_0 e^{i\omega t})$$



... mit Kapazität

$$I(t) = -\omega C U_0 \sin \omega t$$

$$= \operatorname{Re}(\underbrace{i \omega C U_0 e^{i\omega t}})$$



$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$i e^{i\omega t} = i \cos \omega t + \underbrace{i^2}_{-1} \sin \omega t$$

$$= \underbrace{-\sin \omega t}_{\operatorname{Re}} + i \underbrace{\cos \omega t}_{\operatorname{Im}}$$

Impedanz (komplexer Widerstand)

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{1}{i\omega C}$$

Vergl. Ohmsches Gesetz

Vgl. Ohmsches Gesetz

$$R = \frac{U}{I}$$

Impedanz enthält Information über *Amplitude* und *Phase*!

Schaltungselement

Impedanz



$$Z_R = R$$

(reell, konstant in f bzw. ω)



$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

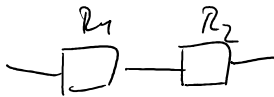
(imaginär, f-abhängig)



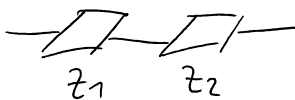
$$Z_L = i\omega L$$

(imaginär, f-abhängig)

Berechnung
analog zu
Widerständen



$$R_{\text{tot}} = R_1 + R_2$$

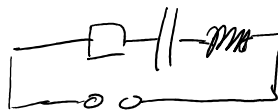


$$Z_{\text{tot}} = Z_1 + Z_2$$

$$L: \quad L_{\text{tot}} = L_1 + L_2$$

$$C: \quad Z_{\text{tot}} = Z_1 + Z_2 = \frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2} = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

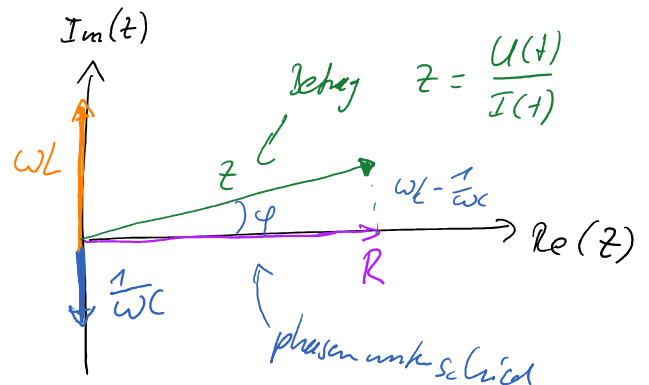
Bsp.: Reihenschwingkreis



$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$$

$$= R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$\frac{1}{i} = -i$$



Rechen Gesamtwiderstand

phasen um $\pi/2$ verschieben

Betrag Gesamtwiderstand

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \left[\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \left[R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

= 0 für $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

Phasenverschiebung

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \right) =$$

$$= \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

