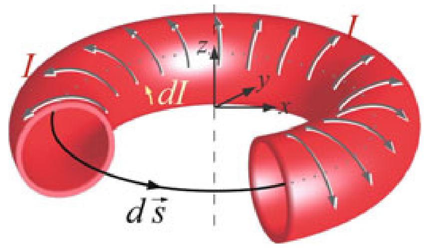
Die Feldstärke im Inneren des Toroiden variiert leicht mit dem senkrechten Abstand ρ zur Toroidachse. Für einen Punkt im Außenraum des Toroiden ist $I_{\text{ein}} = 0$. Das Magnetfeld ist vollständig im Inneren des Toroiden eingeschlossen. Es gibt kein Streumagnetfeld, zumindest nicht, solange die Windungen so dicht liegen, dass man sie als kontinuierliche Stromdichte ansehen kann. Dies ist eine wichtige Besonderheit des Toroiden.



7.5.2 Das Biot-Savart-Gesetz

Wir wollen nun auf ein allgemeines Verfahren eingehen, das es erlaubt, das Magnetfeld beliebiger Anordnungen von Strömen zu berechnen. In der Elektrostatik haben wir das Potenzial beliebiger Ladungsverteilungen durch Superposition der Potenziale einzelner Punktladungen dargestellt (▶ Abschn. 2.4). Mit einem ähnlichen Verfahren können wir auch magnetische Felder bestimmen. Wir unterteilen dazu die Ströme in infinitesimale, gerade Stromelemente (stromdurchflossene Leiterstücke). Das Magnetfeld eines einzelnen solchen Stromelementes können wir angeben. Das resultierende Magnetfeld der gesamten Anordnung ist dann die Summe bzw. das Integral der Felder aller Stromelemente. Dabei müssen wir im Ansatz darauf achten, dass die Ströme nicht unterbrochen sind und die Kontinuitätsgleichung der elektrischen Ladung nicht verletzt wird. Leider ist die Rechnung im magnetischen Fall komplizierter als im elektrostatischen, da wir nun die Richtungen der Ströme berücksichtigen müssen. Aus dieser Überlegung erhalten wir das Biot-Savart-Gesetz. Wir wollen es zunächst über das Vektorpotenzial ableiten. Wir hatten gesehen, dass folgende Beziehung für das Vektorpotenzial gelten muss (Gl. 7.29):

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \tag{7.34}$$

Diese Differenzialgleichung erinnert an die Poisson-Gleichung, die wir in der Elektrostatik kennen gelernt haben. Sie lautete (Gl. 2.65):

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.35}$$

Genauer gesagt stellt jede Komponente von Gl. 7.34 eine Poisson-Gleichung dar, z. B.

$$\Delta A_x = -\mu_0 j_x \tag{7.36}$$

und entsprechend für die y- und z-Komponenten. Die Poisson-Gleichung kann durch das Poisson-Integral gelöst werden (Gl. 2.45):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \tag{7.37}$$

Demzufolge lässt sich Gl. 7.36 auch mit einem Poisson-Integral lösen:

$$\begin{aligned} A_x(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_x(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \\ A_y(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_y(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \\ A_z(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_z(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \end{aligned} \tag{7.38}$$

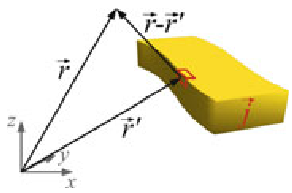


Abb. 7.9 Zur Bestimmung des Vektorpotenzials über das Poisson-Integral

Dies erlaubt es uns, aus einer vorgegebenen Stromverteilung das Vektorpotenzial auszurechnen und daraus das magnetische Feld zu bestimmen. Die Bezeichnungen sind in Abb. 7.9 angegeben.

Man kann das Magnetfeld auch direkt ohne den Umweg über das Vektorpotenzial bestimmen. Dazu müssen wir lediglich die Relation $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ direkt ausführen:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \tag{7.39}$$

Nun müssen wir die Ableitung des Integranden bilden. Wir schreiben sie aus:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{j_z}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{j_y}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{j_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{j_z}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{j_y}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{j_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{pmatrix} \tag{7.40}$$

Nun ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{j_z}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= \frac{\frac{\partial j_z}{\partial y} |\vec{r}-\vec{r}\,'| - j_z \frac{\partial}{\partial y} |\vec{r}-\vec{r}\,'|}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} \\ &= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{j_z}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} (y-y')\,, \end{aligned} \tag{7.41}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{7.42}$$

zur Berechnung der Ableitung eingesetzt haben. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}\,(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(\frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z}\right) + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\left(j_y\,(z-z') - j_z\,(y-y')\right) \\
\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(\frac{\partial j_x}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial x}\right) + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\left(j_z\,(x-x') - j_x\,(z-z')\right) \\
\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y}\right) + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\left(j_x\,(y-y') - j_y\,(x-x')\right)
\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(\vec{\nabla} \times \vec{j}\right) + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\left(\vec{j} \times (\vec{r}-\vec{r}')\right)
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Hier taucht im ersten Summanden die Rotation des Stromes auf. Diese muss aber verschwinden, da zumindest im magnetostatischen Fall ein Strom nicht ohne Antrieb im Kreis fließen kann. Den zweiten Term setzen wir dann in Gl. 7.39 ein und erhalten:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \tag{7.44}$$

Nun sind wir am Ziel. Kennen wir die Stromverteilung $\vec{j}$, so können wir mit diesem Integral das Magnetfeld berechnen. Dies entspricht unserem Vorgehen in der Elektrostatik, wo wir mit Gl. 2.17 eine Möglichkeit gefunden hatten, das elektrische Feld aus den Ladungen zu integrieren. Für einen häufig auftretenden Spezialfall kann man diese Gleichung vereinfachen. Nehmen wir an, dass der Strom nicht über einen größeren Raumbereich ausgedehnt ist, sondern in einzelnen dünnen Drähten fließt. Dann können wir die Integration über die Querschnittsflächen der Drähte ausführen, wenn wir annehmen, dass der Strom sich über den Querschnitt des Drahtes nicht verändert. Dann ist

$$\vec{j}\,dV = \vec{j}\,dA\,d\vec{l} = I\,d\vec{l}, \tag{7.45}$$

wobei $d\vec{l}$ ein Linienelement entlang des Stromes ist. Damit erhalten wir (Abb. 7.10):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \times d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{7.46}$$

Dies nennt man das Biot-Savart-Gesetz.

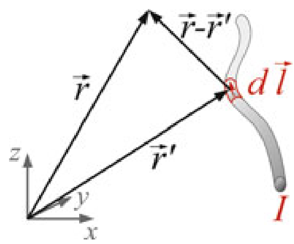


Abb. 7.10 Zum Biot-Savart-Gesetz