

5.5.4. WELLENGLEICHUNG

Stationär: (Vakuum)
 ↙ Potential

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$$

Dynamisch: $\text{rot } \vec{A} \leftarrow \text{Vektorpotential}$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 = \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \phi_{\text{dyn.}} \quad \textcircled{A}$$

erfüllt die Maxwell-Gleichungen:

$$\Rightarrow \text{in } \textcircled{1}: \text{rot } \vec{E} = \text{rot} \left(-\text{grad } \phi_{\text{dyn.}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) =$$

$$= \underbrace{-\text{rot grad } \phi_{\text{dyn.}}}_{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0} - \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{in } \textcircled{2}: \text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} = 0$$

(div rot $\vec{E} = 0$)

Vektorpotential $\vec{A}$ ist nicht eindeutig!

↳ bislang: Coulomb-Gleichung $\text{div } \vec{A} = 0$

↳ neu: Lorentz-Gleichung $\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{\text{dyn.}}}{\partial t}$

$\textcircled{A}$ in $\textcircled{1}$

$$\text{div } \vec{E} = \text{div} \left(-\text{grad } \phi_{\text{dyn.}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad | \times (-1)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \phi) = \Delta \phi \quad \downarrow \text{Gleichung}$$

$$\Delta \phi = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_r = \vec{E}$
 1 für Vakuum

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})f = (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t})f = 0$$

↪ d'Alembert Formel

⇒ Ansatz

beliebige, 2-fach differenzierbare Funktion der Form

$$f(x,t) = f(kx \pm \omega t) \quad \text{mit} \quad \frac{\omega}{k} = c$$

sowie Summe (Überlagerungen) davon

Def: $u(x,t) = kx \pm \omega t$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = +\omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = c^2 k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

=

Bsp.: harmonische Welle

$$f(x,t) = A_0 \cdot \sin(kx \pm \omega t)$$

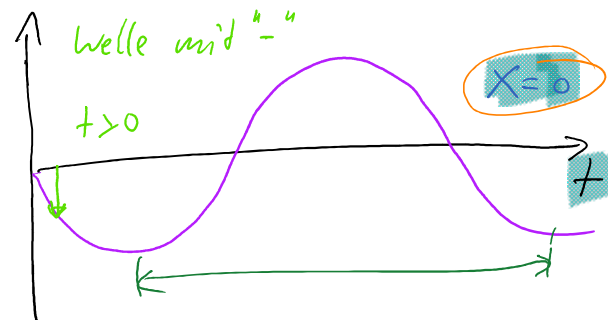
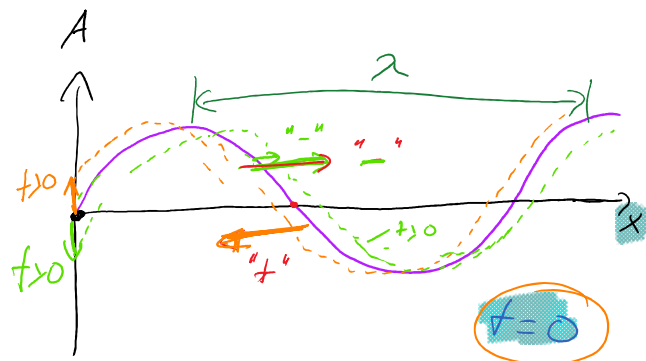
↑ Amplitude
↑ Wellenzahl
↑ Kreisfrequenz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -A_0 \omega^2 \cdot \sin(kx \pm \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -A k^2 \sin(kx \pm \omega t)$$

Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0 \quad \checkmark \text{ erfüllt}$$



- " - " ≙ Welle setzt sich in +x Richtung fort
- " + " ≙ Welle setzt sich in -x Richtung fort

• Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

- Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

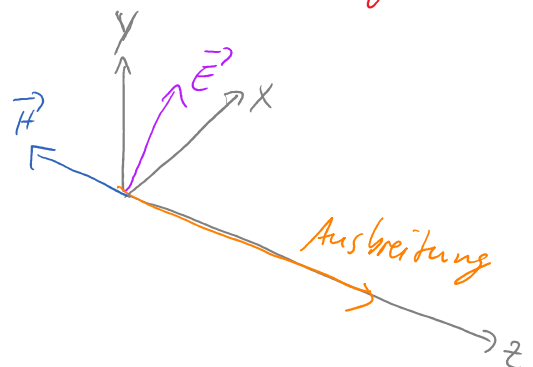
- Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ $\Rightarrow \boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda}}$
 $\Rightarrow \boxed{c = \lambda \cdot f}$
 $\uparrow$ Kreisfrequenz $\uparrow$ Frequenz

5.6.3. EBENE ELEKTROMAGNETISCHE WELLE

Maxwell-Gl. ohne Ströme und ohne freie Ladungen

③ $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\dot{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{\dot{E}}$

④ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\dot{B}} = -\mu_0 \mu_r \vec{\dot{H}}$



Ebene Welle in z-Richtung

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ nach t ableiten

④ nach z ableiten

x-Komp: $\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z}$
y-Komp: $\vdots$
 $-\mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$

y-Komp von $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ aus ④

$\rightarrow$ Wellengleichungen:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}}$$

Wellengl.

Lösungsansatz: ebene Welle für $\vec{E}$

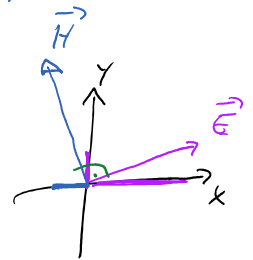
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underbrace{\begin{pmatrix} E_{x,0} \\ E_{y,0} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{E}_0} \cos(\omega t - k z) \quad \text{mit} \quad c = \frac{\omega}{k}$$

Wellengleichung für $\vec{H}$ mit ④

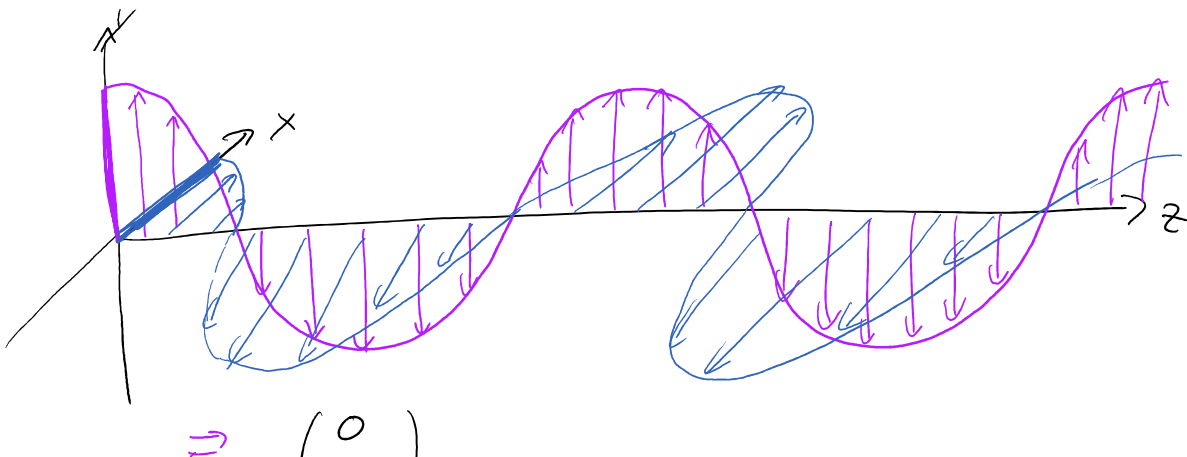
$$\mu_0 \mu_r \dot{\vec{H}} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \sin(\omega t - k z) \begin{pmatrix} -E_{y,0} \\ +E_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Integriere

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \mu_r} \begin{pmatrix} -E_{y,0} \\ E_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - k z)$$



- $\vec{H} \perp \vec{E}$
- in Phase [beide Male $\cos(\omega t - k z)$]



$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

z.B. $\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{y,0} \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \vec{H}_0 = \begin{pmatrix} E_{y,0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bei einer elektromagn. Welle
 schwingen $\vec{E}$ & $\vec{H}$ in Phase.

(Es ist *nicht* so, daß die Energie
 "zwischen E & H " hin- & herschwingt!)